

# La completación de matrices totalmente no negativas: una visión general

RAMADÁN EL-GHAMRY, CRISTINA JORDÁN, JUAN R. TORREGROSA

Depto. de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia

el\_ghamry@hotmail.com, cjordan@mat.upv.es, jr Torre@mat.upv.es

## Resumen

Una *matriz parcial* es una matriz en la cual algunas de sus entradas son especificadas y otras no. Cuando se le asignan valores a las entradas no especificadas, la matriz resultante recibe el nombre de *completación* de la matriz parcial. En un *problema de completación* nos planteamos bajo qué condiciones podemos obtener una completación de una matriz parcial con algunas propiedades preestablecidas. Una matriz parcial  $A = (a_{ij})$  se dice que es *posicionalmente simétrica* cuando  $a_{ij}$  es especificada si y sólo si  $a_{ji}$  lo es. En caso contrario se dice que la matriz parcial es no posicionalmente simétrica.

Una forma natural de describir una matriz parcial  $A = (a_{ij})$ , de tamaño  $n \times n$ , es mediante un grafo  $G_A = (V, E)$ , donde el conjunto de vértices  $V$  es  $\{1, 2, \dots, n\}$  y existe una arista o arco del vértice  $i$  al vértice  $j$  si y sólo si la posición  $(i, j)$  de  $A$  es especificada. En general, cuando la matriz parcial es posicionalmente simétrica el grafo asociado es no dirigido, siendo dirigido en caso contrario.

Una matriz real de tamaño  $n \times n$  se dice que es una matriz *totalmente no negativa* si todos sus menores son no negativos. Estas matrices aparecen con frecuencia en teoría de aproximación, estadística, economía, diseño gráfico asistido por ordenador, etc. Una visión general de este tipo de matrices y sus aplicaciones podemos encontrarla en [1] y [5].

Una matriz parcial decimos que es una *matriz parcial totalmente no negativa* si cualquier submatriz completamente especificada es totalmente no negativa. El problema de completación objeto de este trabajo es el siguiente:

*Dada una matriz parcial totalmente no negativa  $A$ , de tamaño  $n \times n$ , ¿existe una completación  $A_c$  de  $A$  que sea matriz totalmente no negativa?*

Este problema fué estudiado inicialmente por Johnson, Kroschel y Lundquist en [3] y posteriormente por Jordán y Torregrosa en [4]. Actualmente, el-Ghamry en su tesis doctoral [2], muestra el estado general del problema con los nuevos resultados obtenidos. Este trabajo es un resumen de dicha tesis, en el cual completamos los estudios anteriores analizando el problema de completación tanto para grafos dirigidos como no dirigidos.

Teniendo en cuenta que el concepto de total no negatividad no se hereda por semejanza de permutación, debemos trabajar con grafos etiquetados, es decir, grafos en los que la numeración de los vértices está fijada. En nuestro estudio vamos a distinguir entre grafos monótona y no monótonamente etiquetados.

El problema de completación que nos ocupa tiene, en general, respuesta negativa. Presentamos en esta comunicación, además de la situación actual del problema, algunos resultados en el caso de grafos no dirigidos, y también condiciones necesarias y suficientes para la existencia, en este contexto, de una completación totalmente no negativa en los casos de grafos dirigidos: caminos, caminos totalmente especificados, doble-caminos, ciclos y block ciclos.

**Sección en el CEDYA 2007: OTROS TEMAS**

## Referencias

- [1] T. Ando, *Totally positive matrices*, Linear Algebra and its Applications, **90** (1987), 165-219.
- [2] Ramadán el-Ghamry, *El problema de completación de matrices parciales*, Tesis doctoral, Depto. de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, (en curso).
- [3] C.R. Johnson; B.K. Kroschel; M. Lundquist, *The Totally Nonnegative Completion Problem*, Fields Institute Communications, American Mathematical Society, Providence, RI **38** (1998), 97-109.
- [4] C. Jordán; J.R. Torregrosa, *The Totally Positive Completion Problem*, Linear Algebra and its Applications **393** (2004), 259-274.
- [5] S. Karlin, "Totally positive matrices", Stanford University Press, Stanford 1968.