Métodos iterativos multi-punto para ecuaciones no lineales

Juan R. Torregrosa, A. Cordero
Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia
jrtorre@mat.upv.es, acordero@mat.upv.es

Resumen

En este trabajo abordamos el problema de encontrar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, donde f es una función real de variable real. El método de punto fijo más conocido para resolver este problema es el método de Newton,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde x_0 es la iteración inicial.

Numerosos autores, ver por ejemplo [1, 2, 4], han obtenido utilizando técnicas de interpolación, variantes del método de Newton que mejoran su orden de convergencia, y que responden a la expresión

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\sum_{j=1}^{m} A_j f'(\eta_j(x_k))}, \quad \text{con} \quad \eta_j(x_k) = x_k - \tau_j \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

donde τ_j son los nodos, en $[0, 1]$, y A_j los pesos de la fórmula de interpolación.

En este trabajo proponemos un procedimiento alternativo, para obtener variantes del método de Newton, analizando la familia de métodos iterativos multi-punto obtenidos a partir del método de Newton reemplazando $f(x_k)$ por una combinación lineal de valores de $f(x)$ en diferentes puntos. Concretamente, la expresión general es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{f'(x_k)} \sum_{j=1}^{m} A_j f(\eta_j(x_k)), \; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

con

$$\eta_j(x_k) = x_k - \tau_j \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

donde τ_j y A_j son parámetros a elegir en $[0, 1]$ y $\mathbb{R}$, respectivamente. Se pone de manifiesto a lo largo de los resultados obtenidos en el trabajo que el valor de estos parámetros juega un papel importante en el orden de convergencia de los respectivos métodos.

Demostramos que siempre es posible elegir valores de los parámetros τ_j y A_j para obtener métodos iterativos de orden 3 o superior, orden que podemos aumentar bajo ciertas condiciones sobre la función f.

La expresión general (1) incluye, para valores particulares de los parámetros, métodos conocidos como el método de Newton, el método de Traub ([3]), etc, pero también nuevos métodos para los que demostramos que su orden de convergencia e índice de eficiencia son superiores a los de los métodos clásicos.

Terminamos el trabajo presentando los resultados numéricos obtenidos al aplicar diferentes métodos contenidos en (1) a una colección de ecuaciones no lineales. Estos valores permiten ilustrar los resultados teóricos, comparar los distintos métodos y extraer conclusiones.

Todo el desarrollo llevado a cabo en este trabajo lo hemos generalizado a sistemas de ecuaciones no lineales con análogos resultados.

Sección en el CEDYA 2007: AN

Referencias

[1] A. Cordero, Juan R. Torregrosa, *Variants of Newton's method using 5th order quadrature formulas*, Applied Mathematics and Computation. doi.org/10.1016/j.amc.2007.01.062.

[2] M. Frontini, E. Sormani, *Some variant of Newton's method with third-order convergence*, Applied Mathematics and Computation, 140 (2003) 419-426.

[3] J.F. Traub, *Iterative methods for the solution of equations*, Chelsea Publishing Company, New York, 1982.

[4] S. Weerakoon, T.G.I. Fernando, *A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence*, Applied Mathematics Letters, 13 (8) (2000) 87-93.