Propiedades de las Matrices Totalmente Negativas [1]

RAFAEL CANTÓ, BEATRIZ RICARTE, ANA M. URBANO

Instituto de Matemática Multidisciplinar, Univ. Politécnica de Valencia

rcanto@mat.upv.es, bearibe@mat.upv.es, amurbano@mat.upv.es

Resumen

Una matriz real A de tamaño $n \times n$ es (*estrictamente*) *totalmente positiva* y se denota como matriz (STP) TP, si todos sus menores son (positivos) mayores o iguales que cero. Un trabajo clásico donde se estudia este tipo de matrices desde un punto de vista algebraico es [1]. La importancia de las matrices totalmente positivas radica en la gran cantidad de aplicaciones que tiene en teoría de la aproximación, diseño asistido por ordenador, economía estadística, etc. [4]. Numerosos autores han estudiado este tipo de matrices obteniendo caracterizaciones que permiten reducir el número de menores a chequear para saber si una matriz es (STP) TP, así como obtener una factorización del tipo LDU mediante el algoritmo de Gauss y el método de eliminación de Neville.

Cuando todos los menores de la matriz A son (negativos) menores o iguales que cero se dice que la matriz A es (*estrictamente*) *totalmente negativa* y, por analogía con el caso anterior, este tipo de matrices se denota como matrices (STN) TN. Las matrices totalmente negativas pueden considerarse una generalización de las *N-matrices*, es decir, matrices cuyos menores principales son negativos y que aparecen en modelos económicos, en problemas de análisis multivariable, problemas de complementariedad y en conexión con el algoritmo de Lemke's para resolver problemas de programación lineal y de programación cuadrática convexa [5, 6].

En [3] los autores presentan una caracterización de las matrices STN en términos de los parámetros obtenidos a partir del proceso de eliminación de Neville y en [2] se obtiene una descomposición UDL de esta clase de matrices, así como propiedades espectrales y complementos de Schur.

Nuestro objetivo es el estudio de propiedades de las matrices TN semejantes a las propiedades que han sido estudiadas para las matrices TP. En particular, intentar reducir el número de menores a comprobar para saber si una matriz es TN. Para ello intentaremos primero encontrar una descomposición del tipo LDU para las matrices TN invertibles aplicando el algoritmo de Gauss sin intercambio de filas, lo que nos permitirá afirmar que la matriz L es triangular inferior, U triangular superior y D es una matriz diagonal que contiene los pivotes del proceso de eliminación. Además, una descomposición de esta forma permite estudiar propiedades de la matriz inicial A, tales como signos de determinados menores que no son más que elementos de estas matrices y caracterizar cuándo una matriz no es TN.

Por otra parte, es conocido que la descomposición LDU también puede obtenerse, bajo ciertas condiciones, aplicando el método de eliminación completo de Neville (este método consiste en hacer ceros en una columna de una matriz sumando a cada fila un múltiplo de la fila anterior, en lugar de utilizar una fila fija con un pivote fijo como en el método de eliminación de Gauss). Como consecuencia, si es posible obtener una descomposición LDU aplicando en algoritmo de Gauus nuestro siguiente objetivo es estudiar si a las matrices TN invertibles podemos aplicarle el método de eliminación completo de Neville sin intercambio de filas para obtener dicha factorización.

Sección en el CEDYA 2007: AN, Análisis Numérico y Simulación Numérica

Referencias

[1] T. Ando. *Totally positive matrices.* Linear Algebra and its Applications, vol. 90, (1987), 165-219.

[2] S.M. Fallat y P. Van Den Driessche. *On matrices with all minors negative.* The Electronical Journal of Linear Algebra, vol. 7, (2000), 92-99.

[3] M. Gasca y J.M. Peña. *A test for strictly Sign-regularity.* Linear Algebra and its Applications, vol. 197-198, (1994), 133-142.

[4] S. Karlin, *Total Positivity*, Stanford University Press, Stanford, CA, 1968.

[5] T. Parthasarathy y G. Ravindran. *N-matrices.* Linear Algebra and its Applications, vol. 139, (1990), 89-102.

[6] R. Saigal. *On the class of Complementary Cones and Lemke's Algorithm.* SIAM Journal Appl. Math., vol. 23, (1972), 46-60.

[1] Trabajo financiado por el proyecto DGI AGL2004-03263/AGR.