Existencia de punto fijo positivo para operadores crecientes con aplicaciones a un problema de frontera periódico

José Ángel Cid

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Jaén

angelcid@ujaen.es

Alberto Cabada

Dpto. de Análisis Matemático, Univ. de Santiago de Compostela

cabada@usc.es

Resumen

Necesitaremos las siguientes definiciones: dado un espacio de Banach real N decimos que $K \subset N$ es un cono si K es cerrado, $K + K \subset K$, $\lambda K \subset K$ para todo $\lambda \geq 0$ y $K \cap (-K) = \{\theta\}$. Por ejemplo en $\mathbb{R}^m$ podemos considerar el cono

$$\mathbb{R}^m_+ := \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Un cono K induce en N el orden parcial $x \leq y$ *si y sólo si* $y - x \in K$. Diremos que K es normal si existe una constante $c > 0$ ta que $\|x\| \leq c\|y\|$ para todo $x, y \in N$ con $x \leq y$. Si $int(K) \neq \emptyset$ el símbolo $x << y$ significa que $y - x \in int(K)$.

En el reciente trabajo [2], H. Persson probó el siguiente teorema de punto fijo para funciones crecientes usando la teoría del grado topológico.

Teorema 1 *Supongamos que $f : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^m_+$ es continua y creciente. Sea $S = \{x \geq 0 : f(x) \leq x\}$. Si S es acotado y existe $x' >> 0$, $x' \in S$, entonces existe $x \geq 0$, $x \neq 0$, tal que $x = f(x)$.*

Nuestro objetivo es presentar la siguiente generalización (véase [1]) del Teorema 1 a espacios de Banach de dimensión infinita usando el Teorema de Krasnoselskii de compresión y expansión de conos (véase [3, Teorema 13.D]). El resultado obtenido es el siguiente:

Teorema 2 *Sean N un espacio de Banach real, K un cono normal con interior no vacío y $T : K \to K$ un operador completamente continuo y creciente. Definamos $S = \{x \in K : Tx \leq x\}$ y supongamos que*

(i) Existe $\bar{x} \in S$ tal que $\bar{x} >> \theta$.

(ii) S es acotado.

Entonces existe $x \in K$, $x \neq \theta$, tal que $x = Tx$.

La aplicación de este resultado nos permite garantizar, bajo condiciones adecuadas en las funciones $a(t)$ y $f(t, x)$, la existencia de solución para el siguiente problema de frontera periódico

$$x''(t) + a(t)x(t) = f(t, x(t)) \ , \ t \in I = [0, T], \quad x(0) = x(T), \ x'(0) = x'(T).$$

Sección en el CEDYA 2007: EDO

Referencias

[1] A. Cabada y J. A. Cid. *Existence of a non-zero fixed point for nondecreasing operators via Krasnoselskii's fixed point theorem*. Sometido para publicación.

[2] H. Persson. *A fixed point theorem for monotone functions*. Appl. Math. Lett., **19** (2006), 1207-1209.

[3] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. I. Fixed-point theorems*, Springer-Verlag, 1986.