Matrices con inversa positiva

Manuel F. Abad, Juan R. Torregrosa

Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia

maabrod@mat.upv.es, jrtorre@mat.upv.es

Resumen

Una matriz real, no singular, $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times n$, se dice que es *inversa positiva* si todos los elementos de su inversa son no negativos. Estas matrices juegan un papel importante en Economía y en otras ciencias. Además, una matriz inversa positiva que sea también Z-matriz, es una M-matriz no singular, de manera que la clase de las matrices inversa positiva contiene a las M-matrices no singulares, las cuales han sido ampliamente estudiadas y cuyas aplicaciones, por ejemplo, en métodos iterativos, en sistemas dinámicos, en economía, en programación matemática,...., son sobradamente conocidas (ver [2]).

Otra clase de matrices, estrechamente relacionada con la anterior, es la de las matrices totalmente no negativas. Son matrices con todos sus menores no negativos. Aparecen con frecuencia en teoría de aproximación, estadística, diseño gráfico asistido por ordenador, etc.

El objeto de este trabajo es presentar un análisis de las matrices inversas positivas y su relación con otras clases de matrices. Presentamos una caracterización de este tipo de matrices en relación con la resolución de sistemas lineales. Concretamente:

Una matriz real A, $n \times n$, es inversa positiva si y sólo si para todo vector $b \in R^n_+$, existe $x \in R^n_+$ tal que $Ax = b$.

Estudiamos las propiedades hereditarias de las matrices inversa positiva, prestando especial atención a la suma sub-directa introducida por Fallat y Johnson en [3]. El concepto inversa positiva no se hereda, en general, por esta operación, por lo que presentamos condiciones necesarias y suficientes para garantizar que la suma sub-directa de matrices inversa positiva es también una matriz inversa positiva.

Por otra parte, caracterizamos las matrices inversa positiva que son totalmente no negativas y establecemos relaciones entre propiedades de la matriz $A = (a_{ij})$ y la matriz $A^* = (a^*_{ij})$, donde $a^*_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$. Entre otros resultados, demostramos que:

Dada una matriz real A, de tamaño $n \times n$, si A^* es totalmente no negativa, entonces A es inversa positiva. El recíproco, en general, no es cierto

Terminamos el trabajo presentando algunos ejemplos de matrices inversa positiva, que aparecen en problemas de discretización, de factorización de matrices, etc.

Sección en el CEDYA 2007: Matrices no negativas

Referencias

[1] T. Ando, *Totally positive matrices.* Linear Algebra and its Applications, 90 (1987), 165-219.

[2] A. Berman, R. Plemmons, *Nonnegative matrices in the Mathematical Sciences*, Siam, 1994.

[3] S. Fallat, C. Johnson, *Sub-direct sums and positivity clasees of matrices.* Linear Algebra and its Applications, 288 (1999), 149-173.