

Aproximación de homeomorfismos continuos Hölder por homeomorfismos afines a trozos

JOSÉ CARLOS BELLIDO, CARLOS MORA-CORRAL

J.C.B.: ETSI Industriales, Universidad de Castilla-La Mancha. 13071 Ciudad Real. Spain.
C.M-C.: Mathematical Institute, University of Oxford. 24–29 St Giles'. Oxford OX1 3LB. United Kingdom.

JoseCarlos.Bellido@uclm.es, mora-cor@maths.ox.ac.uk

Resumen

En este trabajo se trata el problema de aproximar homeomorfismos por homeomorfismos afines a trozos. La motivación en el contexto de la matemática aplicada viene dada por multitud de situaciones. Citamos por ejemplo las que provienen del contexto de la Elasticidad no Lineal [1]. En esta situación las deformaciones son minimizadores de problemas variacionales planteados sobre el subconjunto de las funciones de un espacio de Sobolev $W^{1,p}$ que además son invertibles y conservan la orientación (estos son requisitos físicos para que una función sea efectivamente una deformación de un medio elástico, que matemáticamente se traducen en que la función sea un homeomorfismo y que el determinante de su gradiente sea positivo). Si queremos aproximar estos minimizadores o deformaciones por funciones afines a trozos que sean deformaciones discretas aparece el problema de la aproximación de homeomorfismos por homeomorfismos afines a trozos. También en el contexto de los problemas de Cálculo de Variaciones que provienen de la Elasticidad no Lineal, un resultado de aproximación de homeomorfismos de Sobolev por homeomorfismos afines a trozos abriría una vía para establecer la validez de la ecuación de Euler-Lagrange para este tipo de problemas y para extender los resultados de regularidad para minimizadores de problemas variacionales de L.C. Evans al caso de la Elasticidad no Lineal [2].

El método típico de aproximación de funciones por funciones afines a trozos, a saber, elementos finitos P_1 -Lagrange sobre una triangulación regular dada basado en los valores nodales de la función objetivo en los vértices de los triángulos, no es válido cuando tratamos de aproximar un homeomorfismo de Sobolev (no C^1) por funciones afines a trozos sobre una triangulación dada que también sean homeomorfismos. Diferentes ejemplos ilustran esta situación. En este sentido para obtener el resultado de aproximación deseado son necesarias nuevas ideas. El principal resultado de nuestra investigación hasta el momento se restringe a funciones continuas Hölder y es el siguiente: cualquier homeomorfismo de exponente $\alpha \in (0, 1]$ definido en un dominio de \mathbf{R}^2 con frontera poligonal, y cuyo inverso también es continuo Hölder de exponente α , puede ser aproximado en la norma Hölder de exponente β , con $\beta < \alpha$ cualquiera, por homeomorfismos afines a trozos sobre triangulaciones. Es importante señalar que la prueba es constructiva, el homeomorfismo afín a trozos lo es sobre una triangulación (no regular en general) que se adapta a la función objetivo y además no coincide con esta función sobre los vértices de los triángulos. La prueba del resultado es técnica y se basa en un resultado clásico de Topología Geométrica [3].

En nuestra comunicación, caso de ser aceptada, nos gustaría tratar los siguientes puntos: la motivación del problema en el contexto antes señalado, por qué el método clásico de valores nodales no funciona, muy brevemente comentar nuestro resultado, y por último nuestro trabajo actual que consiste en tratar de obtener un algoritmo factible de aproximación a partir de nuestra prueba constructiva.

Sección en el CEDYA 2007: OTROS TEMAS

Referencias

- [1] J. M. Ball, *Singularities and computation of minimizers for variational problems*. In “Foundations of computational mathematics (Oxford, 1999)” pages 1–20. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **284**, Cambridge Univ. Press. Cambridge 2001.
- [2] L. C. Evans, Quasiconvexity and partial regularity in the calculus of variations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **95** (1986) 227–252.
- [3] E. E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. Graduate Texts in Mathematics **47**. Springer. New York-Heidelberg 1977.