# Equilibrio de Nash para un problema de control multiobjetivo relacionado con la de depuración de aguas residuales


García-Chan, N., Muñoz-Sola, R.
Dpto. de Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad de Santiago de Compostela, 15706 Santiago.
netog_g@hotmail.com, rafams@usc.es

Vázquez-Méndez, M.E.
Dpto. de Matemática Aplicada, E.P.S., Universidad de Santiago de Compostela, 27002 Lugo.
ernesto@usc.es


## Resumen


El principal objetivo de este trabajo es formular, estudiar y resolver numéricamente un problema de control multiobjetivo relacionado con la gestión de la depuración de un sistema de aguas residuales. Para ello, consideramos un dominio $\Omega$ ocupado por aguas poco profundas en el que se vierten aguas residuales procedentes de un cierto número de plantas depuradoras. Suponemos que cada depuradora está gestionada por un organismo diferente (ya sean ayuntamientos, industrias, ...) y que tiene a su cargo una serie de zonas *sensibles* (playas, zonas de marisqueo, ...) en las que debe garantizar niveles de contaminación inferiores a unos valores máximos prefijados (en caso contrario, la planta deberá hacer frente a una multa cuya cuantía es una función creciente del "exceso" de contaminación en la zona). Admitimos que el gestor de cada planta tiene como objetivo buscar una estrategia de depuración que minimize costes (suma del gasto propio del proceso de depuración y de la cuantía de las multas) y transformamos el problema en encontrar un equilibrio de Nash para el siguiente problema de control multiobjetivo:

Para $j = 1, \ldots, N_E$, encontrar los controles $m_j \in M_j = \{m \in L^\infty(0,T);\, 0 < \underline{m}_j \leq m(t) \leq \bar{m}_j,\ \text{c.p.d. en } (0,T)\}$ que minimicen los funcionales

$$\begin{aligned} J_j(m_1, m_2, \ldots, m_{N_E}) &= \int_0^T f_j(m_j(t))dt + \\ & \sum_{i=n_{(j-1)}+1}^{n_j} \frac{1}{\epsilon_i} \int_{\overline{A}_i \times (0,T)} \psi(\rho(x,t) - \sigma_i) dxdt \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\rho(x,t)$ es la solución de

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho - \beta \Delta \rho + \kappa \rho = \dfrac{1}{h} \Big[ \displaystyle\sum_{j=1}^{N_E} m_j(t) \delta(x - P_j) \Big] & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ \rho(x,0) = \rho_0(x) & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \end{array}\right\} \tag{2}$$

y la función $\psi$ es una regularización de la función $y \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}(\text{máx}(y,0))^2$.

Un problema similar a este, pero con un único funcional a minimizar, ya fue estudiado en [1] como un problema de control óptimo con restricciones puntuales sobre el estado y sobre el control. En este trabajo analizaremos rigurosamente el problema de control multiobjetivo y probaremos la existencia de un equilibrio de Nash. De modo similar a como se hace en [2], introduciremos formalmente el *estado adjunto* del problema y estableceremos un sistema de optimalidad de primer orden que caracterice a los equilibrios de Nash. Finalmente, propondremos un algoritmo numérico para resolver el problema y presentaremos los resultados numéricos obtenidos en una situación realista planteada en la ría de Vigo.


**Sección en el CEDYA 2007:** CO

## Referencias


[1] A. Martínez, C. Rodríguez, M. E. Vázquez-Méndez. *Theoretical and numerical analysis of an control problem related to wastwater treatment.* SIAM J. Control Optim, Vol. 38, No. 5 (2000), 1534-1553.

[2] A. M. Ramos, R. Glowinski y J. Periaux. *Nash equilibria for the multiobjective control of linear partial differential equations.* Journal of optimization theory and applications, Vol. 112, No. 3 (2002) , 457-498.