Resolución numérica de algunos sistemas parabólico–elípticos no lineales

María Teresa González Montesinos, Francisco Ortegón Gallego,

José Manuel Díaz Moreno

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

mariateresa.gonzalez@uca.es, francisco.ortegon@uca.es, josemanuel.diaz@uca.es

Resumen

El calor producido por una corriente eléctrica que atraviesa un semiconductor está descrito por el llamado problema del termistor, consistente en un sistema de dos ecuaciones acopladas, una parabólica no lineal y otra elíptica, para la temperatura, u, y el potencial eléctrico, φ.

Gracias a las leyes de Ohm y Fourier se tiene que $\mathcal{J} = \bar{\sigma}(u)\mathcal{E}$ y $\mathcal{Q} = -\bar{a}(u)\nabla u$, donde $\mathcal{J}$ es la intensidad de corriente eléctrica, $\mathcal{Q}$ el flujo de calor, $\mathcal{E} = -\nabla\varphi$ el campo eléctrico, y $\bar{\sigma}(u)$ y $\bar{a}(u)$ son las conductividades eléctrica y térmica, respectivamente. El problema del termistor se deduce a partir de las leyes de conservación de la corriente y la energía, a saber,

$$\nabla \cdot \mathcal{J} = 0, \quad \rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{Q} = \mathcal{J} \cdot \mathcal{E},$$

siendo ρ la densidad del semiconductor, y c su capacidad calorífica. Suponiendo que ρ y c son constantes y escribiendo $\sigma(u) = \bar{\sigma}(u)/(\rho c)$ y $a(u) = \bar{a}(u)/(\rho c)$, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (a(u)\nabla u) &= \sigma(u)|\nabla\varphi|^2 && \text{en } \Omega_T = \Omega \times (0,T),\\ \nabla \cdot (\sigma(u)\nabla\varphi) &= 0 && \text{en } \Omega_T,\\ u &= 0 && \text{sobre } \Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T),\\ \varphi &= \varphi_0 && \text{sobre } \Gamma_T,\\ u(\cdot,0) &= u_0 && \text{en } \Omega, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, dominio ocupado por el dispositivo eléctrico, es un abierto acotado y regular, $N \geq 1$ y $T > 0$.

Cuando la conductividad térmica es de tipo Wiedemann–Franz, es decir, $a(s) = Ls\sigma(s)$, $L > 0$, y se produce conducción metálica, esto es, $\sigma(s) = O(s^{-1})$ para $|s| \to +\infty$, el estudio del problema (1) es muy complejo debido al carácter degenerado de la ecuación parabólica y el no uniformemente elíptico de la ecuación elíptica. Actualmente, bajo estas hipótesis sobre las conductividades, la existencia de soluciones débiles de (1) constituye un problema abierto; no obstante, en [1] los autores han demostrado la existencia de soluciones de capacidad para este sistema.

En este trabajo se presentarán diversos resultados numéricos obtenidos de la simulación numérica de (1) y otros problemas similares.

Nuestra finalidad reside pues en mostrar algunos de los resultados obtenidos en la resolución numérica del problema del termistor en el caso bidimensional, suponiendo que la conductividad térmica satisface la ley de Wiedemann–Franz y además se produce conducción metálica.

Sección en el CEDYA 2007: AN, EDP

Referencias

[1] M. T. González Montesinos, F. Ortegón Gallego, *Existence of a capacity solution to a coupled nonlinear parabolic–elliptic system.* Commun. Pure Appl. Anal., 6, no. 1 (2007), 23–42.

[2] R. Glowinski. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[3] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, K. Ohtsuka. *FreeFem++, Version 2.11*, 2006.