Análisis numérico de un problema de contacto viscoelástico en piezoelectricidad

José R. Fernández

Dpto. de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela

jramon@usc.es

Mikael Barboteu, Youssef Ouafik

Laboratoire de Mathématiques et Physique pour les Systèmes (MEPS), Université de Perpignan

barboteu@univ-perp.fr, youssef.ouafik@univ-perp.fr

Resumen

La piezoelectricidad es la capacidad de ciertos cristales (como el cuarzo), materiales cerámicos o, incluso, huesos del cuerpo humano para producir corriente eléctrica cuando se encuentran sometidos a esfuerzos o tensiones internas.

En este trabajo consideramos un problema de contacto cuasiestático en piezoelectricidad entre un cuerpo formado por un material viscoelástico y un obstáculo deformable. Hemos utilizado la conocida ley constitutiva electro-viscoelástica para simular el material (véase [1]) y la condición de respuesta normal, estudiada por ejemplo en [2], para modelizar el contacto. La formulación variacional de este problema se escribe de la forma siguiente:

Encontrar un campo de desplazamientos $\boldsymbol{u} : [0,T] \rightarrow V$ *y un potencial eléctrico* $\varphi : [0,T] \rightarrow W$ *tales que* $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$ *y para todo* $t \in [0,T]$*,*

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}))_Q + (\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}))_Q + (\mathcal{E}\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}))_Q + j(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{w})_V \quad \forall \boldsymbol{w} \in V, \tag{1}$$

$$(\beta\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \nabla\psi)_H = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, \tag{2}$$

donde $[0,T]$, $T > 0$, denota el intervalo temporal de interés, $\boldsymbol{u}$, $\dot{\boldsymbol{u}}$ y φ son el campo de desplazamientos, el campo de velocidades y el potencial eléctrico, respectivamente, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ representan los respectivos tensores de viscosidad y de elasticidad, y $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ es el tensor de deformaciones linealizado. Además, $\mathcal{E}$ es el tensor piezoeléctrico de tercer orden y β representa el tensor de permitividad eléctrica. Finalmente, j es el funcional de contacto, $\boldsymbol{f}$ y q incluyen las fuerzas superficiales y volúmicas y la densidad de corriente eléctrica interna, respectivamente, y V y W son los espacios variacionales donde definimos la solución del problema.

En [3] se demostró un resultado de existencia y unicidad de solución débil. Nuestro objetivo se centra, por tanto, en introducir un esquema de discretización completamente discreto, usando el método de los elementos finitos para aproximar la variable espacial y el esquema de Euler implícito para discretizar las derivadas temporales, y probar un resultado general de estimación del error. De este podemos deducir, bajo condiciones de regularidad adicionales, la convergencia lineal del algoritmo respecto de los parámetros de discretización espacial y temporal. Finalmente, presentamos dos ejemplos numéricos que muestran, en primer lugar, la convergencia del algoritmo en un ejemplo test simple y, en segundo lugar, la relación que existe entre la deformación del cuerpo y el potencial eléctrico; es decir, veremos como variaciones del potencial eléctrico pueden producir deformaciones en el cuerpo.

Sección en el CEDYA 2007: AN

Referencias

[1] T. Ideka, *Fundamentals of piezoelectricity.* Oxford University Press, Oxford, 1990.

[2] J.A.C. Martins y J.T. Oden, *Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws.* Nonlinear Anal., 11(3) (1987), 407–428.

[3] M. Sofonea y E.-H. Essoufi, *Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body.* Adv. Math. Sci. Appl., 14(1) (2004), 25–40.