Estudio de la bifurcación de ciclos límite a partir de un gráfico mediante el inverso de factor integrante.

Maite Grau, Isaac A. García
Departament de Matemàtica. Universitat de Lleida
mtgrau@matematica.udl.es, garcia@matematica.udl.es

Héctor Giacomini
Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique. Université de Tours (Francia)
giacomini@phys.univ-tours.fr

Resumen

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar el número máximo de ciclos límite que pueden bifurcar a partir de un gráfico monodrómico de un sistema diferencial autónomo en el plano con inverso de factor integrante.

Consideramos un sistema diferencial autónomo de la forma:

$$\dot{x} = P(x,y)\ ,\ \dot{y} = Q(x,y)\ , \tag{1}$$

donde $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones analíticas definidas en un abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$. El punto denota la derivación de las variables dependientes x e y respecto de la variable real independiente t.

Recordemos que un gráfico del sistema (1) está formado por un número finito de puntos singulares conectados por órbitas regulares del sistema. Por ejemplo, un gráfico puede estar formado por un sólo punto singular con una órbita homoclínica; este gráfico se llama lazo homoclínico.

Los gráficos pueden tener asociada una aplicación de retorno de Poincaré, es decir, puede existir un entorno del gráfico, quizá sólo en su interior o sólo en su exterior, en el que toda órbita con punto inicial en este entorno tienda al gráfico al hacer $t \to \pm\infty$. Los *gráficos monodrómicos* son aquellos que tienen una aplicación de retorno de Poincaré asociada.

Consideremos un sistema (1) con un gráfico monodrómico, que denotaremos por Γ, y consideremos una perturbación uniparamétrica y analítica de (1). Decimos que un ciclo límite del sistema perturbado bifurca de Γ si éste tiende a Γ al hacer tender el parámetro al valor correspondiente a (1). Nos interesa estudiar el número máximo de ciclos límite que bifurcan de Γ, para una perturbación uniparamétrica y analítica cualquiera de (1).

Una función $V : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ no idénticamente nula y de clase $\mathcal{C}^1$ que satisface la ecuación en derivadas parciales siguiente:

$$P(x,y)\,\frac{\partial V}{\partial x} \,+\, Q(x,y)\,\frac{\partial V}{\partial y} \,=\, \left(\frac{\partial P}{\partial x} \,+\, \frac{\partial Q}{\partial y}\right) V(x,y),$$

es un *inverso de factor integrante* del sistema (1). En nuestro trabajo siempre suponemos que el campo (1), y sus perturbaciones, tienen un inverso de factor integrante analítico definido en un entorno de Γ.

Sean $(\phi_i(s), \psi_i(s))$, con $s \in \mathcal{I}_i \subseteq \mathbb{R}$ e $i = 1, 2, \ldots, k$, parametrizaciones de cada una de las órbitas regulares que forman el gráfico Γ. Dado un punto (x,y) en un entorno suficientemente pequeño de una órbita $(\phi_i(s), \psi_i(s))$, siempre podemos encontrar valores de s y n que realicen el siguiente cambio de variables: $x = \phi_i(s) + n\psi_i'(s)$, $y = \psi_i(s) - n\phi_i'(s)$. Notemos que la variable n considerada mide la distancia perpendicular a Γ. Si se satisface que

$$V\left(\phi_i(s) + n\psi_i'(s), \psi_i(s) - n\phi_i'(s)\right) \,=\, n^{m_i}\, v_i(s) \,+\, \mathcal{O}(n^{m+1}),$$

donde m_i es un entero, $m_i \geq 1$, y la función $v_i(s)$ no es idénticamente nula para ningún $i = 1, 2, \ldots, k$, decimos que V tiene multiplicidad $m = \text{mín}_{i=1,\ldots,k}(m_i)$ en el gráfico Γ.

Nuestro resultado muestra que, si el sistema (1) tiene un inverso de factor integrante analítico definido en un entorno del gráfico monodrómico Γ y de multiplicidad m en Γ, entonces a lo sumo bifurcan m ciclos límite de Γ.

Estudiamos varios ejemplos de sistemas en el plano que ilustran este resultado.

Sección en el CEDYA 2007: EDO