Un modelo de aguas someras con dependencia explícita de la profundidad

Raquel Taboada Vázquez, José Manuel Rodríguez Seijo
Dpto. de Métodos Matemáticos e de Representación, Univ. da Coruña
raqueltv@udc.es, mmrseijo@udc.es

Resumen

En este trabajo, se obtiene un modelo de aguas someras partiendo de las ecuaciones de Euler bidimensionales y considerando un dominio en el que la profundidad es pequeña comparada con su largo (podría tratarse de un canal o un río). Esto nos permite introducir un pequeño parámetro adimensional, ε, que representa el cociente entre la profundidad y el largo característicos. Se realiza un cambio de variable a un dominio de referencia independiente del parámetro ε y del tiempo (es decir, la dependencia del parámetro pasa del dominio a las funciones). A continuación, se emplea la técnica de los desarrollos asintóticos para estudiar lo que sucede cuando ε se hace pequeño, es decir, se supone que la solución del problema en el dominio de referencia admite un desarrollo en serie de potencias de ε y se sustituyen los desarrollos en las ecuaciones obtenidas tras el cambio de variable, se identifican los términos multiplicados por la misma potencia de ε y luego se emplean las ecuaciones obtenidas para determinarlos. Finalmente se construye una aproximación de la solución en el dominio de referencia tomando únicamente los primeros términos del desarrollo asintótico y, deshaciendo el cambio de variable, obtenemos un modelo en el domino original.

Para la obtención de este modelo no se ha aplicado el análisis asintótico, como se hace en general en el caso de fluidos, en el dominio original (véase, por ejemplo, [3]), que en este caso depende del parámetro ε y del tiempo t^ε, ni se ha supuesto que la superficie es constante (véase, por ejemplo, [1]), se ha preferido seguir las técnicas habituales en análisis asintótico aplicado a sólidos (véase [2] y las referencias en ellos señaladas).

El modelo así obtenido es:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + \frac{\partial(\bar{u}^\varepsilon h^\varepsilon)}{\partial x^\varepsilon} = 0\\
&\frac{\partial \bar{u}^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + \bar{u}^\varepsilon \frac{\partial \bar{u}^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_s^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} - \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} g\\
&p^\varepsilon = p_s^\varepsilon + \rho_0 g(s^\varepsilon - z^\varepsilon)\\
&\frac{\partial \gamma^{0,i,\varepsilon}}{\partial t^\varepsilon} + \bar{u}^\varepsilon \frac{\partial \gamma^{0,i,\varepsilon}}{\partial x^\varepsilon} = 0 \quad i = 0, 1, \cdots, k\\
&u^\varepsilon = \bar{u}^\varepsilon + \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{(z^\varepsilon - H^\varepsilon)^{i+1}}{(i+1)(h^\varepsilon)^i} - \frac{h^\varepsilon}{(i+1)(i+2)} \right) \gamma^{0,i,\varepsilon}\\
&w^\varepsilon = u^\varepsilon \frac{\partial H^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon}(z^\varepsilon - H^\varepsilon)
\end{aligned}
$$

donde h^ε es la profundidad del agua, $\bar{u}^\varepsilon$ es velocidad horizontal media, p_s^ε es la presión atmosférica, $z^\varepsilon = s^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon)$ ecuación de la superficie del agua, $z^\varepsilon = H^\varepsilon(x^\varepsilon)$ ecuación del fondo del dominio, g es la aceleración de la gravedad, p^ε es la presión, ρ_0 es la densidad del fluido, $\gamma^{0,\varepsilon} = \sum_{i=0}^{k} \gamma^{0,i,\varepsilon} \left(\frac{z^\varepsilon - H^\varepsilon}{h^\varepsilon} \right)^i$ es la vorticidad, u^ε es la componente horizontal de la velocidad, w^ε es la componente vertical de la velocidad.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia mediante el proyecto MTM2006-14491.

Sección en el CEDYA 2007: EDP

Referencias

[1] P. Azérad, F. Guillén, *Mathematical justification of the hydrostatic approximation in the primitive equations of geophysical fluid dynamics*, Siam J. Math. Anal., **33**(4), (2001), 847-859 .

[2] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity. Volume II: Theory of Plates*, North-Holland, Amsterdam, 1997.

[3] J.-F. Gerbeau, B. Perthame, *Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water; numerical validation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, **1**(1), (2001), 89-102.

[4] R. Taboada-Vázquez, *Tesis Doctoral*, Universidade da Coruña, 2006.