Dinámica de una ecuación de reacción-difusión con discontinuidades

José Valero

Dpto. de Estadística, Matemática e Informática, Univ. Miguel Hernández de Elche

jvalero@umh.es

Anibal Rodríguez-Bernal, José M. Arrieta

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Complutense de Madrid

arober@mat.ucm.es, arrieta@mat.ucm.es

Resumen

En el campo de las ecuaciones de reacción-difusión escalares existen estudios bastante precisos del comportamiento asintótico de las soluciones cuando las parte no lineal de la ecuación es una función suficientemente suave. En particular, bajo condiciones que garantizan la existencia de un atractor global y cuando el número de puntos de equilibrio es finito y existe una función de Lyapunov, es bien conocido que el atractor se compone de los puntos fijos y de las trayectorias heteroclínicas que los unen. En varios trabajos se ha estudiado de manera pormenorizada las posibles conexiones entre los puntos fijos, dando pues una descripción precisa del atractor global, conjunto que contiene la dinámica a largo plazo del sistema. Sin embargo, si la función no lineal de la ecuación no es suficientemente suave (en particular, cuando ésta presenta discontinuidades), los métodos de linealización empleados en estos artículos no son ya aplicables.

En el presente trabajo estudiamos el siguiente problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in H_0(u)\,,\ x \in (0,1)\,,\ t > 0, \\ u(t,0) = u_0(x)\,, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \end{cases}$$

siendo H_0 la siguiente función multivaluada: $H_0(u) = -1$, si $u < 0$, $H(0) \in [-1,1]$, $H_0(u) = 1$, si $u > 0$. En primer lugar probamos que esta ecuación posee una número infinito, pero contable, de puntos de equilibrio $v_0 = 0$, $v_1^{\pm}$, $v_2^{\pm}$, ..., y que pueden ser ordenados usando una función de energía (o función de Lyapunov) $E(u)$: $E\left(v_1^{\pm}\right) < E\left(v_2^{\pm}\right) < \cdots < E(v_0)$. En segundo lugar estudiamos la estabilidad de los puntos de equilibrio, probando que los puntos v_1^{+}, v_1^{-} son asintóticamente estables, mientras que el resto son inestables. El punto $v_0 = 0$ posee una propiedad de inestabilidad especial: dado cualquier punto de equilibrio $v_k \neq 0$, existe una solución $u(t)$ con condición inicial $u(0) = 0$ tal que $u(t) \to v_k$ cuando $t \to +\infty$. En particular, esto implica la existencia de una conexión heteroclínica desde v_0 a cualquiera de los demás puntos. Finalmente, estudiamos las posibles conexiones heteroclínicas entre los demás puntos de equilibrio, dando una respuesta parcial a este problema.

Una de las herramientas empleadas en este trabajo es la aproximación de la función H_0 por funciones suaves, obteniendo de esta forma una sucesión de problemas de Chafee-Infante aproximativos. Por tanto, nuestra ecuación se puede considerar como el límite de una sucesión de problemas de Chafee-Infante que sufre la sucesión típica de bifurcaciones de este tipo de problemas.

Sección en el CEDYA 2007: EDP