Métodos Runge-Kutta-Nyström de Pasos Fraccionarios y reducción de orden

M. J. Moreta
Dpto. de Fundamentos del Análisis Económico I. Universidad Complutense de Madrid.
mjesusmoreta@ccee.ucm.es

B. Bujanda, J. C. Jorge
Dpto. de Ingeniería Matemática e Informática, Univ. Pública de Navarra
blanca.bujanda@unavarra.es, jcjorge@unavarra.es

Resumen

En esta comunicación nos ocupamos de la integración numérica eficiente de problemas de la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_{tt}(x,t) & = & Au(x,t)+f(x,t), & x\in\Omega, \quad 0\le t\le T<\infty, \\ u(x,0) & = & u_0(x), & x\in\Omega, \\ u_t(x,0) & = & u_{t,0}(x), & x\in\Omega, \\ \partial u(x,t) & = & g(t), & x\in\partial\Omega, \quad 0\le t\le T<\infty, \end{array} \right. \tag{1}$$

donde Ω es un dominio espacial acotado y A es un operador diferencial que supondremos autoadjunto y semidefinido negativo.

Una de las formas más empleadas en la práctica para resolver el problema presentado es mediante el método de líneas, discretizando primero en espacio y después en tiempo o bien al revés, realizando primero una discretización temporal, seguida de la espacial. En cuanto a la integración temporal, una posibilidad es escribir (1) como un problema de primer orden en tiempo para utilizar métodos conocidos para la resolución de este tipo de problemas (métodos Runge-Kutta), mientras que otra opción es el uso de métodos específicamente diseñados para la integración numérica de problemas de segundo orden en tiempo, entre los que se encuentran los métodos Runge-Kutta-Nyström (RKN).

Los métodos Runge-Kutta-Nyström de Pasos Fraccionarios (RKNPF), presentados en [4], se pueden ver como una alternativa eficiente al uso de métodos RKN cuando se integran numéricamente problemas multidimensionales como (1). Es bien conocido que los métodos RKN explícitos presentan un bajo costo computacional por paso cuando integran problemas numéricos del tipo (1), sin embargo, cuando el problema es arbitrariamente rígido, estos métodos presentan problemas de estabilidad. Por otra parte, los métodos RKN implícitos, que pueden ser incondicionalmente estables, presentan el inconveniente de requerir un elevado coste computacional por etapa, sobre todo cuando se integran problemas multidimensionales en espacio. La utilización de métodos RKNPF permite evitar los problemas de estabilidad de los métodos RKN explícitos y, además, tienen la ventaja de requerir un bajo coste computacional por etapa comparado con otros métodos clásicos de integración temporal. Para obtener esta reducción del coste computacional, se divide el operador diferencial como una suma de operadores más simples en cierto sentido. Después, se integra en tiempo usando un método RKNPF subordinado a dicha partición; de esta manera, sólo una parte de la división actúa de manera implícita en cada etapa intermedia.

Cuando en (1) las condiciones frontera varían con el tiempo, aparece en forma notable el fenómeno conocido como reducción de orden, que ya ha sido estudiado para los métodos RKN (ver [2, 3]) y para los métodos Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios (ver [1]). Partiendo de las técnicas empleadas en [1, 3] se demuestra que modificando convenientemente de manera iterativa los valores que las etapas intermedias toman en la frontera, se puede atenuar este inconveniente y, en algunos casos, evitar por completo, recuperando el orden clásico del método RKNPF.

Sección en el CEDYA 2007: AN

Referencias

[1] I. Alonso-Mallo, B. Cano, J. C. Jorge, J. C. *Spectral-fractional step Runge-Kutta discretizations for initial boundary value problems with time dependent boundary conditions*, Math. Comp. **73** (2004), 1801–1825.

[2] I. Alonso-Mallo, C. Cano, M. J. Moreta, *Order reduction and how to avoid it when explicit Runge-Kutta-Nyström methods are used to solve linear partial differential equations*, J. Comput. Appl. Math. **176** (2005), 293–318.

[3] I. Alonso-Mallo, B. Cano, M. J. Moreta, *Optimal time order when implicit Runge-Kutta-Nystrom methods solve linear partial differential equations*, Aceptado para publicación en APNUM.

[4] M. J. Moreta, B. Bujanda, J. C. Jorge, *Fractional Step Runge-Kutta-Nyström methods*, enviado para publicación, 2006.