Sobre la región de accesibilidad de ciertas iteraciones de tercer orden

J. A. Ezquerro, M. A. Hernández, N. Romero

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

jezquer@unirioja.es, mahernan@unirioja.es, natalia.romero@unirioja.es

Resumen

En este trabajo vamos a considerar el problema de aproximar localmente una raíz x^* de la ecuación $F(x) = 0$ en un espacio de Banach X, donde F es un operador definido en un subconjunto abierto convexo no vacío Ω de X y con valores en otro espacio de Banach Y. Un gran número de problemas de matemática aplicada y de ingeniería se pueden formular como $F(x) = 0$, por lo que su resolución adquiere cierta relevancia. La resolución de este tipo de ecuaciones se lleva comúnmente a cabo mediante la aplicación de procesos iterativos, de manera que, a partir de una o varias aproximaciones iniciales, se construye una sucesión de aproximaciones que converge a la raíz de la ecuación. Aquí sólo vamos a considerar procesos iterativos de un punto y de la forma $x_{n+1} = G(x_n)$, $n \geq 0$. Un aspecto muy importante en el estudio de este tipo de procesos iterativos es la elección de una buena aproximación inicial. En general, es conocida la necesidad de imponer condiciones a las aproximaciones iniciales para obtener la convergencia de los procesos iterativos.

El método de Newton, $x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n)$, $n \geq 0$, es seguramente la iteración de un punto más conocida y utilizada para resolver ecuaciones del tipo anterior, siendo su convergencia al menos cuadrática ([3]). También son muy utilizados otros métodos iterativos de tercer orden, como por ejemplo: el método de Chebyshev, el método de Halley, etc. Es bien sabido que cuanto mayor es el orden de convergencia de un proceso iterativo, mayor es su velocidad de convergencia a una solución de la ecuación. Pero también es sabido que uno de los problemas, entre otros, que tiene el uso de iteraciones de orden alto es que la región de accesibilidad se reduce con respecto a la del método de Newton ([1]).

El objetivo de este trabajo se va a centrar entonces en dos partes: una, estudiar la siguiente familia multiparamétrica de procesos iterativos con orden de convergencia al menos tres ([2])

$$\begin{cases} x_0 \text{ dado}, \\ x_{n+1} = x_n - H(L_F(x_n))[F'(x_n)]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

donde $L_F(x_n) = [F'(x_n)]^{-1}F''(x_n)[F'(x_n)]^{-1}F(x_n)$ y $H(z) = \sum_{k\geq 0} A_k z^k$, con $A_k \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$, cuando se aplica a la resolución de una ecuación como la indicada anteriormente; y dos, analizar la convergencia de estas iteraciones a una raíz de la ecuación desde los mismos puntos de salida que el método de Newton. Notemos que la anterior familia multiparamétrica de procesos iterativos se obtiene como caracterización de métodos iterativos tipo Newton de tercer orden ([2]), e incluye las iteraciones de tercer orden más usuales: el método de Chebyshev, el de Halley, el de Super-Halley, los C-métodos, etc.

Prestaremos especial atención al estudio de la convergencia semilocal de los procesos iterativos bajo condiciones de tipo Newton-Kantorovich ([3]). Para ello, utilizaremos una técnica que consiste en la construcción de un sistema de relaciones de recurrencia en el que ciertas sucesiones escalares están implicadas, demostrándose a partir de ellas la convergencia de las iteraciones.

Sección en el CEDYA 2007: AN

Referencias

[1] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández, *Region of accessibility for a class of Newton-type iterations*, Proyecciones, 17, 1 (1998), 71–76.

[2] M. A. Hernández y N. Romero, *On a characterization of some Newton-like methods of R-order at least three*, J. Comput. Appl. Math., 183, 1 (2005), 53–66.

[3] L. V. Kantorovich y G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.