Métodos linealmente implícitos de tipo Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios aplicados a problemas parabólicos semilineales: reducción de orden y técnicas para evitarla

Blanca Bujanda, Juan Carlos Jorge

Dpto. de Ingeniería Matemática e Informática, Univ. Pública de Navarra

blanca.bujanda@unavarra.es, jcjorge@unavarra.es

Resumen

En esta comunicación nos ocuparemos de la resolución numérica eficiente de problemas parabólicos semilineales de la forma:

$$\text{Encontrar } y(t) : [t_0, T] \to \mathcal{H} \text{ solución de} \\ \begin{cases} y'(t) = L\, y(t) + f(t) + g(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \\ \partial y(t) = b(t) \in \mathcal{H}^b \qquad \forall\, t \in [t_0, T], \end{cases} \tag{1}$$

siendo $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}^b$ dos espacios de Hilbert de funciones definidas sobre un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de frontera Γ, ∂ un operador frontera definido entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}^b$, L un operador elíptico lineal de segundo orden, $f(t)$ el término fuente, $g(t, y)$ una función regular que marca el aporte no lineal y $b(t)$ una condición de contorno dependiente del tiempo.

En [2] presentamos un tipo de métodos que integra de manera muy eficiente esta clase de problemas. La base de los métodos presentados es la misma que la de los métodos de Pasos Fraccionarios cuando son aplicados a problemas parabólicos lineales. Así los métodos se construyen combinando discretizaciones espaciales adecuadas con discretizaciones temporales de tipo RK Aditivo en las que la aportación de la parte lineal de la función derivada, $L\, y(t) + f(t)$, se define mediante un método Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios (ver [6]) y la parte no lineal, $g(t, y)$, mediante un método RK explícito adecuado. Los algoritmos que se obtienen siguiendo este proceso presentan la característica de ser convergentes imponiendo solamente propiedades de tipo estabilidad absoluta lineal (ver [3]); además, si la descomposición del operador elíptico y del término fuente se realiza de manera adecuada, el costo computacional es bajo, comparado con los algoritmos obtenidos con métodos implícitos clásicos, ya que en este caso, en la resolución de las etapas intermedias sólo aparecen sistemas lineales con matrices muy sencillas.

En este tipo de problemas es bien conocido (ver [4],[5]) que aparece con frecuencia el inconveniente de la reducción de orden, sobre todo cuando las condiciones de contorno dependen del tiempo.

Mostraremos una técnica para evitar esta reducción de orden similar a la propuesta en [1]. Este proceso tiene la ventaja de que el costo computacional adicional que supone es muy poco, puesto que sólo afecta a la evaluación de ciertos datos en la frontera del dominio Ω.

Sección en el CEDYA 2007: AN

Referencias

[1] I. Alonso-Mallo & B. Cano *Efficient time integration of nonlinear partial differential equations by means of Rosenbrock methods*, Applied Mathematics Reports, Universidad de Valladolid (2006).

[2] B. Bujanda & J.C. Jorge, *Efficient linearly implicit methods for nonlinear multidimensional parabolic problems*, J. Comput. Appl. Math. **164/165** (2004), 159–174.

[3] B. Bujanda & J.C. Jorge, *Stability results for linearly implicit Fractional Step discretizations of non-linear time dependent parabolic problems*, Appl. Numer. Math. **56** (2006), no. 8, 1061–1076.

[4] B. Bujanda & J.C. Jorge, *Order conditions for linearly implicit Fractional Step Runge-Kutta methods*, IMAJNA (en prensa).

[5] Sanz-Serna, J. M.; Verwer, J. G. & Hundsdorfer, W. H., *Convergence and order reduction of Runge-Kutta schemes applied to evolutionary problems in partial differential equations*, Numer. Math. **50** (1987), no. 4, 405–418

[6] Yanenko, N.N., "The method of fractional steps", Springer, 1971.