Un modelo unidimensional de flujo sanguíneo obtenido mediante el método de desarrollos asintóticos

<u>José Manuel Rodríguez Seijo</u>, María Victoria Otero Piñeiro
Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación, Universidade da Coruña
mmrseijo@udc.es

Resumen

En este trabajo presentamos un nuevo modelo unidimensional del flujo de un fluido a través de un tubo curvilíneo de paredes elásticas. Este modelo es aplicable, en particular, al flujo de la sangre en un vaso sanguíneo.

Para deducir este modelo utilizamos el método de desarrollos asintóticos, considerando como pequeño parámetro adimensional (ε) la relación entre el diámetro medio de la sección transversal y la longitud del tubo. En primer lugar realizamos un cambio de variable a un dominio de referencia independiente de ε, y a continuación suponemos que la solución se puede escribir como una serie de potencias de ε. El paso siguiente es identificar los primeros términos de la serie de potencias y, tras deshacer el cambio de variable, obtenemos una aproximación de la solución en el dominio original.

El modelo así obtenido (sin necesidad de realizar hipótesis a priori sobre la forma de la solución) acopla el movimiento de la pared del tubo con las ecuaciones de movimiento del fluido, y es similar (aunque con alguna diferencia interesante) al modelo propuesto en [1]. A continuación describimos brevemente el modelo que obtenemos.

Si la línea media del tubo curvilíneo viene dada por la aplicación $\mathbf{c} : s \in [a,b] \to \mathbb{R}^3$ (donde suponemos que s es el parámetro natural), y parametrizamos las paredes del tubo mediante la carta

$$\phi(t,s,\theta) = \mathbf{c}(s) + r(t,s,\theta)[(\cos\theta)\mathbf{v}_2(s) + (\sin\theta)\mathbf{v}_3(s)], \quad (s,\theta) \in [a,b] \times [0,2\pi]$$

(donde t es el tiempo y $\{\mathbf{v}_1(s) = \mathbf{c}'(s), \mathbf{v}_2(s), \mathbf{v}_3(s)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ para cada s), entonces el modelo propuesto es:

$$\begin{aligned}
&r(t,s,\theta) = r(0,s,\theta) + \zeta(s)\\
&M_0(s)\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + I_0(s)\zeta = L_0(s)(p_i - p_e)\\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{2\nu_f}{A}\frac{\partial}{\partial s}\left(A\frac{\partial u}{\partial s}\right) = -\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial p_i}{\partial s} - \frac{L}{\rho_f A}f_R - g v_{13}\\
&\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (uA)}{\partial s} = 0
\end{aligned}$$

donde $A(t,s) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta$ es el área de la sección transversal, $L(t,s) = \int_0^{2\pi}\sqrt{(\frac{\partial r}{\partial\theta})^2 + r^2}d\theta$ es su perímetro, $L_0(s) = L(0,s)$, $M_0(s) = \int_0^{2\pi} e\rho_s\sqrt{(\frac{\partial r}{\partial\theta})^2 + r^2}d\theta$, $I_0(s) = \int_0^{2\pi}\frac{eE}{1-\nu_s^2}\frac{[2(\frac{\partial r}{\partial\theta})^2 + r\frac{\partial^2 r}{\partial\theta^2} + r^2]^2}{[(\frac{\partial r}{\partial\theta})^2 + r^2]^{5/2}}d\theta$ (M_0 e I_0 se evalúan en $t=0$), E es el módulo de Young y ν_s el coeficiente de Poisson de la pared del tubo, ν_f es la viscosidad cinemática del fluido, ρ_s y ρ_f son las densidades de la pared del tubo y del fluido, e es el espesor de la pared del tubo, u es la velocidad media del fluido en la dirección tangente a $\mathbf{c}$, ζ es el desplazamiento de la pared del tubo en la dirección radial, p_i y p_e son las presiones interior y exterior al tubo, f_R es una fuerza de rozamiento (típicamente, de la forma $f_R = \rho_F\gamma u|u|$), g es la aceleración de la gravedad y $v_{13} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{e}_3$.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia mediante el proyecto MTM2006-14491.

Sección en el CEDYA 2007: EDP

Referencias

[1] A. Quarteroni, L. Formaggia, *Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System* en *Handbook of Numerical Analysis, Volume XII: Computational Models for the Human Body*, Ed. N. Ayache, Elsevier, 2004.