Puntos de retroceso y soluciones resonantes en ramas no acotadas de soluciones

Rosa Pardo, Jose Arrieta, Anibal Rodriguez-Bernal

Depto. de Matemática Aplicada, Univ. Complutense de Madrid, Madrid 28040, Spain

rpardo@mat.ucm.es, arrieta@mat.ucm.es, arober@mat.ucm.es

Resumen

Consideramos el siguiente problema parabólico $u_t - \Delta u + u = 0$ con una condición de frontera no lineal dependiendo de un parámetro del tipo $\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u + g(\lambda, x, u)$ de forma que $\frac{g(\lambda,x,u)}{u} \to 0$ cuando $|u| \to \infty$. En [2, 3] demostramos que este tipo de problemas admite ramas de soluciones (λ, u_λ) que no están acotadas cuando λ converge hacia un autovalor de Steklov. Este fenómeno se conoce como bifurcación desde infinito, ver [7].

Una solution (λ^*, u^*) en una rama de soluciones es un **punto de retroceso** si no hay soluciones $(\lambda, u_\lambda) \approx (\lambda^*, u^*)$ para $\lambda > \lambda^*$, (o bien no hay soluciones próximas para $\lambda < \lambda^*$). Estos puntos de retroceso están siempre relacionados con la multiplicidad de soluciones y, eventualmente, con sus cambios de estabilidad. En ramas de soluciones que no son a priori ni subcríticas (a la izquierda del autovalor) ni supercríticas (a la derecha), establecemos condiciones suficientes para que exista una sucesión de infinitos puntos de retroceso. Consideremos análogamente ramas de soluciones que no son a priori ni estables ni inestables. Establecemos condiciones suficientes para que exista una sucesión de infinitos puntos de retroceso *simples* (en los que la solución cambia de estable a inestable). Además, en ambos casos la sucesión de puntos de retroceso converge al punto de bifurcación desde infinito y, en consecuencia, existen **infinitas soluciones del problema resonante**.

En [2, 3] establecimos condiciones suficientes para que las ramas de soluciones sean subcríticas o supercríticas y estudiamos asimismo el principio del anti-máximo, ver [5] y condiciones del tipo Landesman y Lazer para algunos problemas resonantes, aquellos en los que el parámetro coincide con el autovalor, ver [6]. Existen resultados en la literatura para problemas elípticos con la no linealidad actuando en el interior del dominio y con condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas, ver [1]. En este caso, los autovalores del problema de Dirichlet juegan el papel determinante. En [2, 4] establecemos condiciones suficientes para garantizar la estabilidad de dichas ramas no acotadas de soluciones. Además suponiendo que la no-linealidad es diferenciable con respecto del parámetro, obtuvimos en [4] condiciones suficientes para garantizar la monotonía con respecto del parámetro. En consecuencia, la solución positiva es única bajo ciertas condiciones, para valores de λ suficientemente próximos al autovalor de Steklov. Las condiciones de Landesman y Lazer para la existencia de soluciones de equilibrio en los casos resonantes establecen que, si la bifurcación desde infinito es subcrítica (o supercrítica), entonces el problema resonante tiene solución. Es por tanto interesante centrarse en el estudio de ramas que no son a priori *ni subcríticas ni supercríticas* y analizar su comportamiento en un entorno del punto de bifurcación desde infinito. Las funciones g oscilatorias son ejemplos arquetipo.

Sección en el CEDYA 2007: EDP

Referencias

[1] D. Arcoya & J.L. Gámez, *Bifurcation Teoría and Related Problems: Anti-Maximum Principle and Resonance*, Comm. P.D.E., Vol. **5** , N. 4, 557-569, (2001).

[2] J. M. Arrieta, R. Pardo y A. Rodríguez-Bernal, *Bifurcation and stability of equilibria with asymptotically linear boundary condicións at infinity.* Proc. Roy. Soc. Edinburg, Vol.137 A, 1-28, (2007).

[3] J. M. Arrieta, R. Pardo y A. Rodríguez-Bernal, *Problemas elípticos con condiciones de contorno asintoticamente lineales en infinito.* Proceedings of the XVIII Congress on Differential Equacións y Applicacións/VIII Congress on Applied Mathematics (Spanish) (Tarragona, 2003).

[4] J. M. Arrieta, R. Pardo y A. Rodríguez-Bernal, *Sobre la estabilidad y la monotonía de ramas de soluciones no acotadas de problemas elípticos con condiciones de frontera asintóticamente lineales.* Proceedings of the XIX CEDYA, IX Congreso de Matemática Aplicada (Spanish), ISBN: 84-689-7726-8, (Madrid, 2005)

[5] P. Clement and L.A. Peletier, *An anti-maximum principle for second order elliptic operators*, J. Diff. Eq., Vol. **34**, 218-229, (1979).

[6] E.M. Landesman and A.C. Lazer, *Nonlinear Perturbations of linear elliptic problems at resonance*, J. Math. Mech., Vol. **19**, 609-623, (1970).

[7] P. H. Rabinowitz, "On Bifurcation From Infinity", *J. Differential Equations*, Vol. **14**, 462-475, (1973).