Serie de Chebyshev para un operador Schrödinger 1-D ergódico.

J.C. Abderramán, M.A. Sastre, E. Torrano.
Grupo de Polinomios Ortogonales y Geometría Fractal.
Dpto. de Matemática Aplicada. Facultad Informática.
Universidad Politécnica de Madrid
jc.abderraman@fi.upm.es, masastre@fi.upm.es, emilio@fi.upm.es.

Resumen

El estudio de conjuntos de autofunciones $\{\Psi_n(\epsilon)\}$, $n \in Z^+$, y del espectro de energías de operadores de Schrödinger unidimensionales ha generado mucho interés, tanto teórico como aplicado. Este tipo de operadores aparecen, por ejemplo, en los modelos de superredes cuánticas dentro de las nanotecnologías emergentes. Otra aplicación puede verse en la referencia [3], donde se estudia el electrón en una red cristalina con potencial periódico y campo magnético transversal uniforme. Hofstadter usó la aproximación *tight binding* y una transformación *gauge* adecuada para, a partir de un operador Schrödinger formulado en una EDP de dos variables, obtener un operador Schrödinger unidimensional. Obtuvo un caso particular, $\lambda = 1$, de la ecuación de Harper (1).

$$\Psi_{n+1}(\epsilon) = (\epsilon - 2\lambda\cos(n2\pi\theta + \nu))\Psi_n(\epsilon) - \Psi_{n-1}(\epsilon). \tag{1}$$

Aquí por simplicidad se anula la fase inicial, $\nu = 0$. En el caso ergódico, θ irracional, el espectro no depende de ν. En [3] se aclara el significado físico de los parámetros ϵ, λ, θ y ν para ese problema. La dificultad del análisis del espectro en el caso ergódico y la producción científica que ha generado puede consultarse en [5].
La ecuación (1) es también un caso particular de la relación de recurrencia fundamental de los polinomios ortogonales. Con las condiciones iniciales adecuadas se cumplen las condiciones del teorema de Favard, [2], de la existencia de una medida $\mu(\epsilon)$ sobre un soporte a determinar, que tiene asociada una familia $\{\Psi_n(\epsilon)\}$, de polinomios mónicos ortonormales, autofunciones de (1).
En [1] presentamos las autofunciones $\Psi_n(\epsilon)$ expandidas en serie de Chebyshev de primera clase.

$$\Psi_n(\epsilon) = \sum_{k=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} a_k^{(n)}(\epsilon,\lambda)T_k(\omega). \tag{2}$$

Usamos las propiedades algebraicas de los polinomios de Chebyshev $\{T_k(\omega)\}$ para separar la variable $\omega = cos(2\pi\theta)$ de las variables ϵ y λ que se transfieren a los coeficientes de la serie $\{a_k^{(n)}(\epsilon,\lambda)\}$. Se obtuvo la expresión recurrente para los $a_k^{(n)}$. Por ejemplo, para $n \geq 6$ resulta:

$$\begin{aligned} a_k^{(n+1)} = &-\lambda a_{k-n}^{(n)}\sigma(n-1) + \epsilon a_k^{(n)}(1 - \sigma(\frac{(n)(n-1)}{2})) - \lambda a_{n-k}^{(n)}(1-\sigma(n)) \\ &- \lambda a_{k+n}^{(n)}(1 - \delta_{k,0} - \sigma(\frac{(n)(n-3)}{2})) - a_k^{(n-1)}(1 - \sigma(\frac{(n-1)(n-2)}{2})). \end{aligned} \tag{3}$$

($\sigma(k)$ es la función escalón de Heaviside y $\delta_{k,0}$ la delta de Kronecker, con $0 \leq k \leq \frac{(n+1)(n)}{2}$).

Aquí obtenemos las matrices de transferencia para los coeficientes $\{a_k^{(n)}(\epsilon,\lambda)\}$ y, controlando el parámetro λ, estudiamos la convergencia de la serie (2) para $\Psi_n(\epsilon)$ con el método matricial clásico de las series de Chebyshev, [4].

Sección en el CEDYA 2007: OTROS TEMAS

Referencias

[1] J.C. Abderramán, *Chebyshev expansion for the eigenfunctions of the almost Mathieu operator*, 6th Int. Congress on Industrial and Applied Math. ICIAM07, Zurich, 2007.

[2] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials.* Gordon and Breach. New York 1978.

[3] D. F. Hofstadter, *Energy levels and waves functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields.* Physical Review B.14,6,455–460, 1976.

[4] J. Mason, H. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*, Chapman and Hall/CRC Press, 2003.

[5] J. Puig, *Cantor Spectrum for the Almost Mathieu Operator*, Comm. Math. Phys. 244(2):297-309, 2004.