El método de los momentos para problemas variacionales no locales

Ernesto Aranda

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Castilla - La Mancha

Ernesto.Aranda@uclm.es

René Meziat

Dpto. de Matemáticas, Univ. de los Andes, Bogotá, Colombia

rmeziat@uniandes.edu.co

Resumen

En este trabajo analizamos un problema variacional no convexo y no local de la forma

$$\min_u \iint_{J\times J} W\left(x, y, u(x), u(y), u'(x), u'(y)\right)\, dx\, dy$$

Ciertos modelos energéticos tales como las transiciones de fase, el ferromagnetismo o algunos modelos de fractura mecánica conducen a este tipo de problemas (cf. [1, 3] entre otros). La situación típica en el contexto del cálculo de variaciones es que, en ausencia de ciertas propiedades sobre el integrando W que garantizan la semicontinuidad inferior débil del funcional integral, las sucesiones minimizantes pueden generan oscilaciones cuyo límite débil no es minimizador del problema. Además, en este tipo de problemas en los que el gradiente aparece repetido, no está claro cómo formular la envoltura semicontinua del mismo, surgiendo así un aspecto diferenciador enorme frente a lo que ocurre en los modelos unidimensionales habituales (cf. [2]).

La idea central desarrollada en este trabajo se basa en el uso de los resultados previos de Pedregal [6] en los que se formula una relajación de este problema en términos de medidas de Young. En el caso particular en el que el integrando W es un polinomio en las variables correspondientes a las derivadas u', es posible la aplicación del *método de los momentos*, desarrollado en [4, 5] para el caso de problemas variacionales escalares unidimensionales, el cual, mediante el uso de los momentos de las mencionadas medidas de Young, permite reformular el problema como un programa matemático con estructura cuadrática y cónica.

El tratamiento llevado a cabo permite, por una parte, abordar la resolución numérica de este tipo de problemas, y por otra, dar alguna luz sobre la envoltura semicontinua inferior de este tipo de funcionales en el caso homogéneo (es decir, cuando W sólo depende de las derivadas).

Sección en el CEDYA 2007: CO

Referencias

[1] Alberti, G., & Bellettini, G. A nonlocal anisotropic model for phase transitions: asymptotic behaviour of rescaled energies. *European Journal of Applied Mathematics 9* (1998), 261–284.

[2] Bevan, J., & Pedregal, P. A necessary and sufficient condition for the weak lower semicontinuity of one-dimensional nonlocal variational integrals. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 136*, 1 (2006), 23–51.

[3] Brandon, D., & Rogers, R. The coercivity and nonlocal ferromagnetism. *Cont. Mech. Therm.*, 4 (1992), 1–21.

[4] Egozcue, J., Meziat, R., & Pedregal, P. From a nonlinear, nonconvex variational problem to a linear, convex formulation. *App. Math. Optim. 47* (2003), 27 – 44.

[5] Meziat, R. *El Método de los Momentos para Problemas Variacionales No Convexos.* Tesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 2001.

[6] Pedregal, P. Nonlocal variational principles. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications 29*, 12 (1997), 1379–1392.