Resolución numérica de un modelo de frontera libre para el crecimiento tumoral

CARMEN CALZADA
Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Univ. de Córdoba
carmen.calzada@uco.es

GEMA CAMACHO
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla
gemacv@us.es

ENRIQUE FERNÁNDEZ-CARA
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla
cara@us.es

MERCEDES MARÍN
Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Univ. de Córdoba
merche@uco.es

Resumen

En este trabajo presentamos un esquema de resolución numérica de un modelo de frontera libre que simula el crecimiento de un tumor (ver [1]). Se supone que en el instante t el tumor ocupa una región $\omega(t)$ de frontera $\gamma(t)$. Denotamos por $\sigma = \sigma(x,t)$ la concentración de nutrientes y por $p = p(x,t)$ la presión a la que están sometidas las células del tumor. Las ecuaciones del modelo son las siguientes:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \alpha\sigma - \Delta\sigma = 0 \text{ en } \omega(t) \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$-\Delta p = \mu(\sigma - \tilde{\sigma}) \text{ en } \omega(t) \quad t \in (0,T), \tag{2}$$

$$\sigma = \sigma_\gamma \text{ sobre } \gamma(t), \tag{3}$$

$$p = a\kappa \text{ sobre } \gamma(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -V_n \text{ sobre } \gamma(t), \tag{5}$$

$$\sigma|_{t=0} = \sigma_0 \text{ en } \omega(0) \text{ dado.} \tag{6}$$

Aquí, $V_n(x,t)$ representa la componente normal de la velocidad con la que se mueven las células del tumor y κ es la curvatura de la frontera $\gamma(t)$. Se supone que μ, α y a son constantes positivas y que σ_0, $\tilde{\sigma}$ y σ_γ son funciones dadas.

Se trata de determinar la frontera libre $\gamma(t)$ y las funciones σ y p.

Para la resolución se ha utilizado un esquema de discretización en tiempo que permite desacoplar las diferentes incógnitas. Partiendo del dominio inicial $\omega(0)$, se calcula la concentración de nutrientes σ en el instante posterior resolviendo la ecuación (1) junto con las condiciones frontera (3) y la condición inicial (6). Con este dato, se calcula la presión p a partir de la ecuación (2) y la condición frontera (4). Ambos problemas se resuelven utilizando un método de dominios ficticios distribuidos en volumen (ver [2]) con el fin de no tener que cambiar el mallado del dominio en cada etapa temporal. Para la discretización espacial se utilizan elementos finitos P2-Lagrange. Para calcular el nuevo dominio ω, en la siguiente etapa en tiempo, se utiliza un método de conjuntos de nivel ([3]). Para ello se tiene en cuenta que, utilizando (5), se conoce, a partir de la presión p, la componente normal de la velocidad de crecimiento de la frontera. Una vez actualizado el dominio se repite el proceso en la siguiente etapa temporal.

Se presentaran algunas experiencias numéricas obtenidas.

Sección en el CEDYA 2007: AN (Análisis Numérico y Simulación Numérica)

Referencias

[1] Bazaliy, B.V. , Friedman, A. , A Free Boundary Problem for a Elliptic-Parabolic System: Application to a Model of Tumor Growth. *Comm. Partial Differential Equations*, 28 , no. 3-4, p.517–560, (2003).

[2] Glowinski, R, *Numerical methods for fluids (Part 3)*, Handbook of Numerical Analysis, Vol. IX Ed. North-Holland, Amsterdam (2003).

[3] Sethian, J.A. *Level set methods and fast marching methods. Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science.* Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, (1999).