Un método RKN diagonalmente implícito para problemas stiff oscilatorios de segundo order

J.M. Franco, I. Gómez

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Zaragoza

jmfranco@unizar.es, igomez@unizar.es

Resumen

En el presente trabajo estamos interesados en la resolución numérica de problemas stiff oscilatorios asociados a problemas de valor inicial (PVIs) de segundo orden de la forma

$$M\ddot{q} + Kq = f(t, q), \quad q(t_0) = q_0, \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0, \tag{1}$$

donde la matriz de masas M y la matriz de rigidez K son simétricas y definidas positivas, y $\dot{q}$ y $\ddot{q}$ representan, respectivamente, la primera y segunda derivadas del vector desplazamiento q con respecto al tiempo. Este tipo de problemas surgen en distintas áreas de la ingeniería y las ciencias aplicadas tales como elastodinámica, mecánica de estructuras, sismología o cuando ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) de segundo orden en el tiempo son semidiscretizadas en las variables espaciales. En particular, cuando la malla espacial es refinada, las EDPs semidiscretizadas dan lugar a PVIs que son arbitrariamente stiff. Cuando se aplican métodos explícitos para resolver esta clase de problemas el tamaño del paso de integración queda limitado por la frecuencia de mayor magnitud ($\Delta t = \mathcal{O}(\omega_{max}^{-1})$), lo que da lugar a pasos excesivamente pequeños. Por lo tanto, para una resolución eficiente de problemas stiff cuya solución esta dominada por las componentes de baja frecuencia, se requiere de un método implícito que sea incondicionalmente estable.

En la literatura científica se han propuesto diversos métodos Runge–Kutta–Nyström implícitos incondicionalmente estables para resolver problemas stiff (1), siendo la mayoría de ellos de tipo diagonalmente implícito (DIRKN) (ver ref. [1–3]). El principal atractivo de los métodos DIRKN proviene de la estructura de su matriz de coeficientes, que da lugar a una reducción del coste algebraico involucrado en la resolución de las etapas internas cuando se utilizan iteraciones de tipo Newton. Recientemente, Alonso-Mallo et al. [1] han realizado un detallado análisis de la estabilidad lineal de los métodos RKN y han construido un método DIRKN incondicionalmente estable que presenta un mejor comportamiento que otros métodos cuando las soluciones de los problemas stiff combinan componentes dominantes de frecuencias cortas con componentes de frecuencias largas y pequeñas amplitudes.

Motivados por los resultados numéricos obtenidos en [1], nuestro propósito se centra en el diseño y construcción de un método DIRKN que resulte práctico y eficiente en la resolución de distintos problemas stiff del tipo (1) que aparecen en las aplicaciones prácticas. Así, hemos obtenido un método DIRKN A–stable de orden 4 con orden 2 en las etapas, que además, satisface ciertas condiciones algebraicas asociadas a las componentes de frecuencias largas y pequeñas amplitudes (componentes stiff) que pueden aparecer en las soluciones de los problemas stiff considerados. El nuevo método ha sido aplicado a la resolución de distintos problemas oscilatorios de tipo stiff, y los resultados numéricos obtenidos muestran una importante mejora en el comportamiento cuando se comparan con los obtenidos por otros códigos DIRKN propuestos en la literatura científica como el reciente código de Alonso-Mallo et al. [1] y el más clásico de Sharp et al. [3].

Sección en el CEDYA 2007: AN

Referencias

[1] I. Alonso-Mallo, B. Cano and M.J. Moreta. *Stability of Runge–Kutta–Nyström methods.* J. Comput. Appl. Math., **189** (2006) 120–131.

[2] J.M. Franco, I. Gómez and L. Rández. *Four–stage symplectic and P–stable SDIRKN methods with dispersion of high order.* Numer. Algorithms, **26** (2001) 347–363.

[3] P.W. Sharp, J.M. Fine and K. Burrage. *Two-stage and three-stage diagonally implicit Runge–Kutta–Nyström methods of order three and four.* IMA J. Numer. Anal., **10** (1990) 489–504.