Regularidad anisótropa de un problema de Ecuaciones Primitivas.

D. Bresch

Laboratoire de Modélisation et Calcul, Université Joseph-Fourier, Grenoble (France)

didier.bresch@imag.fr

F. Guillén-González, M. A. Rodríguez-Bellido

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla (España)

guillen@us.es, angeles@us.es

Resumen

Las Ecuaciones Primitivas (EP) son un sistema en velocidad-presión que modelan gran cantidad de flujos geofísicos 3D, en particular el movimiento del agua en el océano inducido por la velocidad del viento en superficie y las fuerzas centrípetas y de Coriolis. Se obtienen a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes (NS) con viscosidad anisótropa (turbulenta), suponiendo dos simplificaciones importantes: la presión hidrostática y la hipótesis de techo rígido (superficie del agua fija) [4, 3]. Un problema modelo que retenga las principales dificultades analíticas se reduce a encontrar una velocidad horizontal $\mathbf{v} = (v_1, v_2) : (t; \mathbf{x}, z) \in (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^2$ y una presión superficial $p : (t; \mathbf{x}) \in (0,T) \times S \to \mathbb{R}$, donde $T > 0$ es un instante de tiempo, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un dominio oceánico y $S \subset \mathbb{R}^2$ es el dominio de la superficie, tales que:

$$\text{(EP)} \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + v_3 \, \partial_z \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} p \; = \; \mathbf{f} \;\; \text{en } (0,T) \times \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \; = \; 0 \;\; \text{en } (0,T) \times S, \quad \mathbf{v}|_{t=0} \; = \; \mathbf{v}_0 \;\; \text{en } \Omega, \end{array} \right.$$

siendo $v_3(\mathbf{x}, z) = \displaystyle\int_z^0 (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}, s) \, ds$ la velocidad vertical.

La condición de contorno en superficie es $\partial_z \mathbf{v}|_{\text{superficie}} = \boldsymbol{\tau}$, donde $\boldsymbol{\tau}$ es la tracción del viento, y en el fondo se consideran condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneo (no deslizamiento) o de tipo Neumann (dependientes de la fricción con el fondo). La regularidad de este sistema presenta dificultades debido a la singularidad de la convección vertical $v_3 \, \partial_z \mathbf{v}$. Son varios los autores que han estudiado la regularidad débil ($\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$) de (EP) (p. e. [3]), la regularidad fuerte para el sistema lineal estacionario ([5]), o la regularidad fuerte ($\mathbf{v} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$) del sistema no lineal (p. e. [2]). En [2] se usan "estimaciones anisótropas", aprovechando la particular estructura de las (EP), donde $\partial_z v_3$ es regular pero no $\nabla_{\mathbf{x}} v_3$.

En este trabajo estudiamos la regularidad de (EP) con la condición de contorno sobre $\partial_z \mathbf{v}$ en el fondo. Dicha condición no es estándar cuando el fondo no es plano, ya que entonces $\partial_z \mathbf{v}$ no coincide con la derivada normal asociada al operador de segundo orden de las (EP) que es de tipo Laplaciano. Sin embargo, estas condiciones de contorno sobre $\partial_z \mathbf{v}$ son usadas por varios autores para la implementación de esquemas numéricos (p. e. [1]).

En primer lugar demostramos que, para determinadas configuraciones del dominio, hay existencia de solución débil global en tiempo. En segundo lugar, reformulando el problema con las nuevas incógnitas $\partial_z \mathbf{v}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ (siendo $\bar{\mathbf{v}}$ la media vertical de $\mathbf{v}$), demostramos simultáneamente que $\partial_z \mathbf{v}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ poseen regularidad $\mathbf{H}^2$ para datos pequeños. Finalmente, analizamos la regularidad de orden superior para ambas velocidades, $(\partial_z \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}) \in \mathbf{H}^3(\Omega)$, lo que a nuestro conocimiento son los primeros resultados de regularidad superior a $\mathbf{H}^2$ para (EP).

Sección en el CEDYA 2007: EDP

Referencias

[1] V Casulli & E. Cattani,*Stability,Accuracy and Efficiency of a Semi-Implicit Method for Three-Dimensional Shallow Water Flow.* Computers Math. Applic., 27-4 (1994), 99-112.

[2] F. Guillén-González, N. Masmoudi & M. A. Rodríguez-Bellido, *Anisotropic estimates and strong solutions of the Primitive Equations.* Differential Integral Equations, 14-11 (2001), 1381-1408.

[3] J. L. Lions, R. Temam & S. Wang, *On the equations of the large scale Ocean.* Nonlinearity, 5 (1992), 1007-1053.

[4] J. Pedlosky, *Geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag, 1987.

[5] M. Ziane, *Regularity Results for Stokes Type Systems*, Applicable Analysis, 58 (1995), 263-292.