

# Comportamiento asintótico del modelo $\alpha$ -Navier-Stokes 3D con retardos

TOMÁS CARABALLO, ANTONIO M. MÁRQUEZ, JOSÉ REAL  
Depto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, U. de Sevilla  
caraball@us.es, ammarquez@us.es, jreal@us.es

## Resumen

El modelo  $\alpha$ -Navier-Stokes (modelo LANS- $\alpha$  o ecuaciones viscosas de Camassa-Holm)

$$\begin{cases} \partial_t(u - \alpha\Delta u) + \nu(Au - \alpha\Delta(Au)) + (u \cdot \nabla)(u - \alpha\Delta u) \\ -\alpha\nabla u^* \cdot \Delta u + \nabla p = f, \text{ en } \mathcal{O} \times (\tau, +\infty), \\ \nabla \cdot u = 0, \text{ en } \mathcal{O} \times (\tau, +\infty), \\ u = 0, \quad Au = 0, \text{ sobre } \partial\mathcal{O} \times (\tau, +\infty), \\ u(\tau) = u^0, \text{ en } \mathcal{O}, \end{cases} \quad (1)$$

ha recibido mucha atención en los últimos años. Las razones principales radican en que este modelo ha resultado muy útil para aproximar las ecuaciones de Navier-Stokes, y además se ha revelado como un marco adecuado para el estudio de uno de los problemas de más interés en dinámica de fluidos, modelizar el movimiento de fluidos turbulentos (véase, por ejemplo, Foias et al. [5] y Holm et al. [6]).

Para la versión tridimensional en dominios acotados se conocen resultados de existencia y unicidad de solución para el caso determinista autónomo (véase [4]), para el caso determinista no autónomo conteniendo retardos (véase [2]) y para el caso estocástico con retardos (véase [1]).

En cuanto al comportamiento asintótico de las soluciones de este modelo, para su versión determinista, Coutand et al. demuestran en [4], para el caso autónomo, la existencia del atractor global para las mismas y el carácter finito de su dimensión fractal. Para la versión estocástica de este modelo, hemos establecido en [3] hipótesis suficientes que aseguran la existencia y unicidad de soluciones estacionarias, y estudiado algunas propiedades de estabilidad de dicho modelo. Además, hemos analizado los efectos producidos por perturbaciones estocásticas en la versión determinista del sistema, comprobando si se produce algún cambio en el comportamiento de las soluciones del mismo, en relación a su estabilidad.

En [2] demostramos la existencia de un atractor en sentido pullback (y, eventualmente, la del atractor forward uniforme) para el caso no autónomo con retardos. En nuestro último trabajo nos hemos interesado por el comportamiento asintótico del modelo  $\alpha$ -Navier-Stokes 3D, en el caso en que aparecen perturbaciones que contienen efectos de memoria en el sistema (retardos). Nuestro objetivo es exponer en esta comunicación algunos de los resultados conseguidos en este sentido. En concreto, probaremos, en primer lugar, un resultado que asegura la existencia de soluciones estacionarias para nuestro modelo abstracto cuando el término que contiene el retardo tiene una forma especial, y siempre que la viscosidad sea suficientemente grande. Entonces, demostraremos que cuando la solución estacionaria es única, todas las soluciones de nuestro problema convergen exponencialmente a esta última. Este resultado requiere una hipótesis fuerte sobre la función retardo, hipótesis que debilitaremos usando una aproximación diferente, a saber, un argumento tipo Razumikhin [7].

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] T. Caraballo, A. M. Márquez-Durán & J. Real, On the stochastic 3D-Lagrangian averaged Navier-Stokes  $\alpha$ -model with finite delay, *Stochastics and Dynamics*, Vol. 5, Núm. 2 (2005) 189-200.
- [2] T. Caraballo, A. M. Márquez-Durán & J. Real, Pullback and forward attractors for a 3D LANS- $\alpha$  model with delay, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Vol. 15, Núm. 2 (2006), Pág. 559-578.
- [3] T. Caraballo, A.M. Márquez-Durán and J. Real, On the asymptotic behaviour of a stochastic 3D LANS- $\alpha$  model, *Applied Mathematics and Optimization*, 53 Núm. 2 (2006), 141-161, New York.
- [4] D. Coutand, J. Peirce & S. Shkoller, Global well-posedness of weak solutions for the Lagrangian averaged Navier-Stokes equations on bounded domains, *Comm. on Pure and Appl. Anal.* 1, Núm.1, (2002), 35-50.
- [5] C. Foias, D.D. Holm & E.S. Titi, The three dimensional viscous Camassa-Holm equations and their relation to the Navier-Stokes equations and turbulence theory, *J. Dyn. Diff. Eq.* 14, 1 (2002), 1-35.
- [6] D.D. Holm, C. Jeffery, S. Kurien, D. Livescu, M.A. Taylor & B.A. Wingate, The LANS- $\alpha$  Model for Computing Turbulence. Origins, Results and Open Problems, *Los Alamos Science*, 29 (2005), 152-171.
- [7] B.S. Razumikhin, On stability of systems with a delay. *Prikl. Mat. Mech.*, 20 (1956), 500-512.