Existencia de solución para un modelo termoeléctrico con conductividad térmica una función de Caratheodory

Francisco Pena, Alfredo Bermúdez, Rafael Muñoz-Sola
Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Santiago de Compostela
fpena@usc.es, mabermud@usc.es, rafams@usc.es

Resumen

En esta charla presentamos un resultado de existencia de solución para un sistema no lineal de ecuaciones en derivadas parciales parabólicas. El modelo deriva de las ecuaciones de Maxwell en conductores para corrientes de baja frecuencia para el campo magnético, acopladas con un problema de Stefan para la temperatura. En concreto, consideramos el siguiente sistema en un dominio Ω acotado de $\mathbb{R}^3$ y para $T > 0$:

$$\partial_t(\mu(x)\mathbf{h}) + \nabla \times \left(\frac{1}{\sigma(x,\theta)} \nabla \times \mathbf{h} \right) = 0 \text{ en } \Omega \times]0,T[, \tag{1}$$

$$\partial_t e - \nabla \cdot (k(x,\theta)\, \nabla\theta) = \frac{1}{\sigma(x,\theta)} |\nabla \times \mathbf{h}|^2 \text{ en } \Omega \times]0,T[, \tag{2}$$

junto con

$$e(x,t) \in g(x, \theta(x,t)) \text{ c.p.d. en } \Omega \times]0,T[.$$

Este sistema aparece en el modelado de dispositivos, a veces conocidos como “termistores”, donde la fuente de calor es electromagnética. El problema de Stefan se usa para considerar los posibles cambios de estado de los materiales. Este sistema ya fue considerado por los autores en [1]. Las principales limitaciones del citado trabajo consistían en que a) solo se permitían cambios de estado a una temperatura dada y b) la conductividad térmica k de los materiales solo dependía del punto x. Eso impedía considerar tanto materiales compuestos cuyos cambios de estado se producen en varios “saltos” como aquéllos cuya conductividad térmica depende de la temperatura.

El resultado de existencia dado en [1] se obtenía considerando el sistema con el segundo miembro de (2) truncado, para el cual se demostraba la existencia viéndolo como el acoplamiento de dos problemas evolutivos (electromagnético lineal y térmico no lineal) y usando el teorema de punto fijo de Schauder. Esto requería la unicidad de solución del problema térmico (véase [3]), lo que impedía tratar una conductividad térmica dependiente a la vez de la temperatura y el punto x.

Para obtener el nuevo resultado de existencia que evita las restricciones anteriores, fue necesario cambiar el enfoque de la demostración. Se parte de nuevo del sistema truncado y se considera una semidiscretización en tiempo totalmente implícita, que puede ser vista como el acoplamiento de un problema electromagnético lineal con un problema térmico, ambos estacionarios. El problema térmico puede reescribirse como una inecuación variacional de segunda especie, para la cual hay existencia y unicidad de solución. Aplicando el teorema de punto fijo de Schauder se demuestra la existencia de solución del problema truncado semidiscretizado en tiempo. Seguidamente se obtienen estimaciones a priori para la solución de éste (campo magnético, temperatura y entalpía) independientes del paso de tiempo Δt pero posiblemente dependientes del parámetro de truncamiento. Pasando al límite cuando $\Delta t \to 0$, se demuestra la existencia de solución del problema truncado. Se obtienen estimaciones de la solución del problema truncado independientes del parámetro de truncamiento mediante una técnica desarrollada en [1], que adapta el método de [2] al caso en que $g(x,\cdot)$ es maximal monótono (constante por subdominios en la variable x). Se obtiene la convergencia puntual de la temperatura suponiendo que el operador maximal monótono $g(x,\cdot)$ admite un número finito de saltos, mejorando los resultados de [1] , en donde se requería que el operador $g(x,\cdot)$ tuviera a lo sumo un salto. Finalmente, se efectúa el paso al límite con respecto al parámetro de truncamiento como en [1], construyendo así una solución del sistema original.

Sección en el CEDYA 2007: Ecuaciones en Derivadas Parciales

Referencias

[1] Bermúdez, A. and Muñoz-Sola, R. and Pena, F., *A nonlinear partial differential system arising in thermoelectricity.* European J. Appl. Math., 16, 6, (2005), 683–712.

[2] Boccardo, L. and Gallouët, T., *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data.* Journal of Functional Analysis, 87, 1, (1989), 149–169.

[3] DiBenedetto, E. and Showalter, R. E. *Implicit degenerate evolution equations and applications.* SIAM Journal on Mathematical Analysis, 12, 5, (1982), 731–751.