Un modelo de tipo Grad-Shafranov para plasmas con simetría helicoidal

J.F. Padial

Dpto. de Matemática Aplicada, E.T.S. Arquitectura. Univ. Politécnica de Madrid

jf.padial@upm.es

J.I. Díaz

Dpto. de Matemática Aplicada, F. Matemáticas. Univ. Complutense de Madrid

diaz.racefyn@insde.es

Resumen

Uno de los problemas más importantes de la fusión termonuclear controlada mediante confinamiento magnético es la detección de las condiciones bajo las cuales el plasma puede ser confinado magnéticamente sin tocar las paredes de la cámara de vacío. Tal fín se logra mediante una de las dos estrategias siguientes: (a) se induce un campo magnético invariante bajo rotaciones en torno a un eje de simetría (es la *simetría axial* típica de máquinas de tipo Tokamak), o, (b) se disponen las bobinas magnéticas de manera que las líneas de campo se envuelvan *casi* helicoidalmente en torno a una curva o *eje magnético* (es la *geometría axisimétrica* típica de máquinas de tipo Stellarator). Con la palabra *casi* queremos expresar que el radio de curvatura de la hipotética hélice no necesita permanecer constante y que el eje tampoco necesita ser una recta.

Las ecuaciones 3-D que gobiernan el equilibrio del plasma (supuesto, a escala macroscópica, dado por un fluido ideal) en una máquina de tipo Stellarator son, de un lado, las ecuaciones de Maxwell y, de otro, la ecuación de equilibrio fluido-dinámico. Sin embargo, mediante la consideración de adecuadas coordenadas (de Boozer $(\rho, \rho\theta, \phi)$), Hender y Carreras obtuvieron, en 1984, un modelo 2-D al suponer ciertos órdenes de mágnitud y aplicar un proceso de promedios. Se llega así a una ecuación de tipo *Grad-Shafranov* para la función de flujo promediado en la componente ϕ que es un problema elíptico inverso no lineal y de frontera libre: hallar funciones $u : \Omega \subset I\!R^2 \to I\!R$ y $F : I\!R \to I\!R_+$ tales que

$$(P) \begin{cases} -\mathcal{L}u = aF(u) + F(u)F'(u) + bp'(u) & \text{en } \Omega, \\ u = \gamma & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\mathcal{L}$ es un operador lineal elíptico de segundo orden, $\gamma \leq 0$ y a y b son funciones regulares dadas en términos de la métrica asociada. La función $p(u(x))$ representa la presión y obedece a una cierta ley constitutiva (del tipo de $p(t) = \frac{\lambda}{2} \text{máx}\{t, 0\}$ con $\lambda > 0$). La función incógnita u representa el flujo poloidal promediado y $F(u) \geq 0$ es la coordenada contravariante toroidal del campo magnético. Se sabe que en la región de vacío $F(t) = F_v$ $\forall t \leq 0$. A las ecuaciones anteriores hay que añadir la condición típica de máquinas Stellarator que expresa que la corriente total en el interior de cada superficie magnética es nula, $\int_{\{u>t\}} [F(u)F'(u) + p'(u)b] = 0$ para todo $t \in [ess \inf_\Omega u, ess \sup_\Omega u]$ (la existencia de soluciones fue mostrada en Díaz, Padial, Rakotoson 1998).

El objetivo de esta comunicación es proponer un sencillo modelo en el que la geometría del campo mágnético presenta una *simetría helicoidal total.* Mostramos que el problema 3-D se puede reducir a un problema 2-D (similar a (P)) pero ahora sin necesidad de utilizar coordenadas de tipo Boozer ni de aplicar métodos de promedios. Obtenemos la expresión explícita de los coeficientes a y b y analizamos la resolución del problema inverso asociado.

Sección en el CEDYA 2007: EDP

Referencias

[1] A.H. Boozer, "Establishment of Magnetic Coordinates for a given Magnetic Field". *Phys. Fluids*, **25**, n. 3, March 1982.

[2] T.C. Hender, B.A. Carreras, "Equilibrium calculations for helical axis Stellarators". *Phys, Fluids* **27** (1984), 2101.

[3] J. I. Díaz, J. F. Padial and J. M. Rakotoson, "Mathematical treatment of the magnetic confinement in a current-carrying Stellarator", *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* **34** (1998), 857–887.