Relajación de problemas de control en los coeficientes con un funcional dependiendo del gradiente

J. Casado Díaz, J. Couce Calvo, J.D. Martín Gómez

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla

jcasadod@us.es, couce@us.es, jdmartin@us.es

Resumen

Se considera un problema de diseño óptimo consistente en obtener la mezcla de dos materiales anisotrópicos (eléctricos o térmicos) que minimize un funcional coste dependiente del gradiente del estado. Denotando por A, B las matrices de difusión que caracterizan a ambos materiales, el problema modelo que estudiamos se escribe como

$$\begin{cases} \inf \left\{ \displaystyle\int_\Omega F(\nabla u)\, dx + G(u) \right\} \\ -div\,(A\chi_\omega + B\chi_{\Omega\setminus\omega})\nabla u = f \quad \text{en } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ \omega \subset \Omega \text{ medible, } |\omega| = s, \end{cases}$$

donde G es un funcional secuencialmente continuo en la topología débil de H^1. Es bien conocido ([3]) que este tipo de problemas no admite solución en general y de ahí la necesidad de realizar una relajación (ver por ejemplo [4], [5]). En el caso en que F es nula, es clásico que esta relajación se obtiene reemplazando el conjunto de diseños admisibles por el conjunto de materiales obtenidos mediante homogeneización. En nuestro caso (F no necesariamente nula) mostramos que ésto también es así pero además la extensión del funcional a los nuevos materiales no es inmediata sino que admite una expresión integral del tipo

$$\int_\Omega H(\nabla u, M\nabla u, \theta)\, dx + G(u),$$

donde M representa el material homogeneizado y θ la proporción de material A usada en la mezcla. Probamos además que nuestro resultado permite obtener una nueva demostración de algunos resultados obtenidos previamente por otros autores ([1], [2]) para el caso de materiales isótropos y $F(\nabla u) = |\nabla u|^2$.

Sección en el CEDYA 2007: CO

Referencias

[1] J.C. Bellido, P. Pedregal *Explicit quasiconvexification for some cost functionals depending on derivatives of the state in optimal designing.* Discr. Contin. Dyn. Syst. 8, 4 (2002), 967-982.

[2] Y. Grabovsky. *Optimal design for two-phase conducting composites with weakly discontinuous objective functionals.* Adv. Appl. Math. 27 (2001), 683-704.

[3] F. Murat. *Théorèmes de non existence pour des problèmes de contrôle dans les coefficients.* C.R.A.S Sci. Paris A 274 (1972), 395-398.

[4] F. Murat, L. Tartar. *Calculus of variations and homogenization.* En *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials*, ed. L. Cherkaev, R.V. Kohn. Progress in Nonlinear Diff. Equ. and their Appl., 31, Birkaüser, Boston, 1998, 139-173.

[5] L. Tartar. *Remarks on optimal design problems.* En *Calculus of variations, homogenization and continuum mechanics,* ed. G. Buttazzo, G. Bouchitte, P. Suquet. Advances in Math. for Appl Sci, 18, World Scientific, Singapore, 1994, 279-296.