Tratamiento asintótico de las condiciones de contorno para problemas de convección dominante

Isabel Sánchez Muñoz

Dpto. de Matemática Aplicada I, Univ. de Sevilla

isanchez@us.es

Tomás Chacón Rebollo, Macarena Gómez Marmol

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla

chacon@us.es, macarena@us.es

Resumen

Sea Ω un dominio acotado de $\boldsymbol{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ con frontera Γ. Consideramos un campo de velocidades $\boldsymbol{v}$ definido en un abierto V que contiene a $\bar{\Omega}$ y que suponemos de clase $\mathcal{C}^1(V)$ y con divergencia nula en V. Llamamos Γ^- a la parte de la frontera de entrada de flujo, es decir, $\Gamma^- = \{x \in \partial\Omega, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} < 0\}$, siendo $\boldsymbol{n}$ el vector normal unitario y exterior en Γ. Consideramos también una función $f \in L^2(\Omega)$ y una función $g \in L^2(|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|;\Gamma^-)$, y por último, un parámetro positivo μ.

Con estos datos, planteamos el siguiente problema de convección-difusión:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Hallar } w \text{ tal que:} \\ \boldsymbol{v}\cdot\nabla w - \mu\Delta w = f \quad \text{en} \quad \Omega; \\ w\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} - \mu\dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}} = g\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad \text{en} \quad \Gamma^-; \\ \mu\dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\setminus\Gamma^-. \end{array}\right. \tag{1}$$

En este trabajo, estudiamos la convergencia cuando el coeficiente de difusión μ tiendo a cero, de la solución de este problema a la del siguiente problema de convección pura:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Hallar } w \text{ tal que} \\ \boldsymbol{v}\cdot\nabla w = f \quad \text{en} \quad \Omega; \\ w = g \quad \text{en} \quad \Gamma^-. \end{array}\right. \tag{2}$$

Como resultado de nuestro análisis, obtenemos que esta convergencia se verifica en el sentido de la convergencia débil en un espacio de Hilbert asociado a la derivada convectiva y la convergencia fuerte en $L^2(\Omega)$ y la de las trazas en el espacio correspondiente, $L^2(|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|;\Gamma^-)$. La clave para ello, reside en la elección de funciones test que nos permiten obtener estimaciones a priori adecuadas y en dar al problema convectivo un tratamiento variacional, extendiendo las ideas de Azérad en [1].

Como consecuencia de este estudio teórico, podemos afirmar que para flujos gobernados por ecuaciones de convección-difusión, pero predominantemente convectivos en la frontera de entrada de flujo, imponer el flujo total en esta parte de la frontera es una buena aproximación a dar una condición de tipo Dirichlet. Justificamos así, la forma no estándar en la que se imponen numéricamente las condiciones de contorno en algunos métodos numéricos de resolución de modelos de convección-difusión (véase [3], [2] y [4], como ejemplos).

Sección en el CEDYA 2007: EDP

Referencias

[1] P. Azérad, J. Pousin, *Inégalité de Poincaré courbe pour le traitement variationnel de l'équationde transport*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 322 (1996), 721-727.

[2] S. Camarri, M. V. Salvetti, B. Koobus, A. Dervieux, *Large-eddy simulation of a bluff-body flow on unstructured grids*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 40 (2002), 1431-1460.

[3] T. Chacón, D. Franco, F. Ortegón, I. Sánchez, *Modelling of compressible flows with highly oscillating initial data by homogenization*, Applied Numerical Mathematics, vol. 26 (1998), 435-464.

[4] C. Le Ribault, L. Le Penven, M. Buffat, *LES of the compressed Taylor vortex flow using a finite volume/finite element method on unstructured grids*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 52 (2006), 355-379.