El modelo BGK con potencial confinante: existencia, comportamiento asintótico y equilibrios Maxwellianos periódicos en tiempo

Roberta Bosi
Inst. Analysis und Scientific Computing, TU Wien, Austria
bosi@aurora.anum.tuwien.ac.at

María J. Cáceres
Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Granada
caceresg@ugr.es

Resumen

En este trabajo [1] estudiamos la existencia, estabilidad y comportamiento asintótico de la ecuación no lineal y no homogénea de Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) en presencia de un potencial externo ϕ:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi \cdot \nabla_v f = M[f] - f\,, \tag{1}$$

donde $M[f]$ es la *Maxwelliana local*

$$M[f](t,x,v) = \frac{\rho(t,x)}{(2\pi T(t,x))^{N/2}}\ \exp\left(-\frac{|v-u(t,x)|^2}{2T(t,x)}\right) \tag{2}$$

definida en términos de los momentos en velocidad de f: la densidad espacial ρ, la velocidad media u y la temperatura T dados por $\big(\rho,\, \rho u,\, \rho|u|^2 + \rho T N\big) = \int_{\mathbb{R}^N} \big(1,\, v,\, |v|^2\big)\, f(t,x,v)dv$. El potencial externo $\phi = \phi(x)$ satisface las siguientes hipótesis:

$$\phi(x) \geq 0, \quad \phi \in C^2(\mathbb{R}^N), \quad \exp(-\phi(x)) \in L^1(\mathbb{R}^N), \tag{3}$$

$$|x||\nabla\phi(x)| \leq c_1(1+\phi(x)),\ |\nabla\phi(x)|(1+|v|^\sigma) \leq c_2(1+|v|^2+2\phi(x)), \tag{4}$$

para algún $\sigma \in (0,1]$ y $c_1, c_2 \in (0,+\infty)$. Esta ecuación modela la dinámica cinética de un gas (ver [2]), la presencia del potencial ϕ permite confinar las partículas y la existencia de estados de equilibrio no triviales con masa y energía finitas.

Para un dato inicial $f_0 \geq 0$ con masa, entropía y energía total finitas probamos la existencia de soluciones integrales (*mild*) en L^1, empleando argumentos de compacidad. Para ello seguimos la aproximación de Perthame [4], donde la dificultad en nuestro caso radica en el control de los momentos de orden alto en función de los de orden menor.

Cuando el tiempo tiende a infinito probamos que el sistema se relaja hacia una distribución Maxwelliana. Este fenómeno era conocido para el caso de dominios acotados (ver [3]).

Aplicando las técnicas de compacidad del resultado de existencia, mostramos que cuando $t_n \to \infty$ se tiene convergencia en $C([0,\tau]; L^1(\mathbb{R}^{2N}))$ de $f(t+t_n, x, v)$ hacia un estado Maxwelliano con la misma masa que el dato inicial y con energía y entropía acotadas.

Un caso particularmente interesante lo encontramos considerando el potencial armónico, es decir $\phi(x) = |x|^2/2$, porque aparece una familia de estados de equilibrio dependientes del tiempo de forma periódica. Todos los estados de esta familia son estables y su estabilidad puede ser estudiada considerando como funcional de Lyapunov la entropía relativa: $H[f,g] = \int f \log(f/g)\ dxdv$, que nos muestra también la estabilidad en términos de la norma L^1. Por otro lado, en esta familia de estados estables hay un único estado estacionario (es decir, independiente del tiempo) para el cual la entropía es mínima. Cabe preguntarse si el sistema se relajará hasta este estado estacionario. La presencia de los otros estados de equilibrio no nos garantiza la relajación hacia el estado estacionario. En esta dirección, encontramos condiciones necesarias sobre el dato inicial para esperar convergencia hacia el estado estacionario, en términos de la entropía.

Sección en el CEDYA 2007: EDP

Referencias

[1] R. Bosi, M. J. Cáceres, *The BGK model with external confining potential: Existence, long-time behaviour and time-periodic Maxwellian equilibria*, prepublicación Universität Münster "Angewandte Mathematick und Informatik"02/06-N, (2006).

[2] C. Cercignani, *The Boltzmann equation and its applications*, Springer, 1988.

[3] L. Desvillettes, *Convergence to equilibrium in large time for Boltzmann and B.G.K. equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 110, 1 (1990), 73-91.

[4] B. Perthame, *Global existence to the BGK model of Boltzmann equation*, J. Differential Equations, 82, (1989), 191-205.