Comportamiento asintótico de una viga elástica fijada en pequeñas zonas de uno de sus extremos

J. Casado Díaz, M. Luna Laynez

Dpto. de Ecuacines Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla

jcasadod@us.es, mllaynez@us.es

F. Murat

Laboratoire Jacques-Louis Lions, Univ. Pierre et Marie Curie

murat@ann.jussieu.fr

Resumen

El objetivo de esta comunicación es estudiar el comportamiento asintótico de la solución de un problema de elasticidad lineal planteado sobre la viga delgada $(0,1) \times \varepsilon S$, donde S es un dominio acotado regular de $\mathbb{R}^2$ y $\varepsilon > 0$ tiende a cero. En el extremo $x_1 = 1$ la viga está fijada en la totalidad de su base, mientras que en el otro extremo, $x_1 = 0$, sólo está fijada en la unión de N pequeñas zonas cuya talla, $\varepsilon r^\varepsilon$ con $r^\varepsilon > 0$ tendiendo a cero, es un infinitésimo con respecto al grosor de la viga. Sobre el resto de la frontera se impone una condición de tipo Neumann.

Se podría pensar que el hecho de que las zonas de sujeción en $x_1 = 0$ sean tan pequeñas hace que su efecto sea inapreciable en el límite. Sin embargo mostramos como esto no es así y encontramos varios comportamientos dependiendo de r^ε, el número de zonas y su distribución.

Para $N = 1$ aparecen tres tallas críticas, ε^3, ε y $\varepsilon^{1/3}$, y consecuentemente siete regímenes distintos: $r^\varepsilon \ll \varepsilon^3$, $r^\varepsilon \approx \varepsilon^3$, $\varepsilon^3 \ll r^\varepsilon \ll \varepsilon$, $r^\varepsilon \approx \varepsilon$, $\varepsilon \ll r^\varepsilon \ll \varepsilon^{1/3}$, $r^\varepsilon \approx \varepsilon^{1/3}$, y $\varepsilon^{1/3} \ll r^\varepsilon$. Cuando r^ε es un infinitésimo con respecto a ε^3, $r^\varepsilon \ll \varepsilon^3$, la zona de sujeción es tan pequeña que el comportamiento límite es el mismo que se obtiene cuando no existe esta zona. Contrariamente en el caso $\varepsilon^{1/3} \ll r^\varepsilon$ el comportamiento es el que obtendríamos si la viga estuviera fijada en toda la base $x_1 = 0$. En los demás casos aparecen ciertos comportamientos intermedios.

Para $N \geq 2$ el resultado es diferente. En particular, mostramos que si las zonas se concentran alrededor de tres puntos no alineados (por tanto $N \geq 3$) sólo aparecen dos tallas críticas, ε^3 y ε, que conducen a cinco regímenes diferentes: $r^\varepsilon \ll \varepsilon^3$, $r^\varepsilon \approx \varepsilon^3$, $\varepsilon^3 \ll r^\varepsilon \ll \varepsilon$, $r^\varepsilon \approx \varepsilon$, $\varepsilon \ll r^\varepsilon$. Es decir, ahora es suficiente que ε sea un infinitésimo respecto de r^ε para que el comportamiento de la viga sea el mismo que si la tuviésemos fijada en toda la base. Esto prueba matemáticamente como es preferible fijar una viga en una base alrededor de tres puntos no alineados (por ejemplo clavos) a hacerlo alrededor de tan sólo uno, aún cuando utilicemos una zona de mucho mayor grosor.

Sección en el CEDYA 2007: EDP

Referencias

[1] J. Casado Díaz, M. Luna Laynez, F. Murat, *Asymptotic behavior of an elastic beam fixed on a small part of one of its extremities.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 338 (2004), 975-980.

[2] J. Casado Díaz, M. Luna Laynez, F. Murat, *The diffusion equation in a notched beam.* Calculus of Variations and PDE, por aparecer.

[3] F. Murat, A. Sili, *Comportement asymptotique des solutions du système de l'élasticité linéarisée anisotrope hétérogène dans de cylindres minces.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 328 (1999), 179-184.

[4] L. Trabucho, J.M. Viaño, *Mathematical modelling of rods.* Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV, North-Holland, 1996.