Dinámica para un modelo compartimental no lineal y no autónomo

Víctor Muñoz, Sylvia Novo, Rafael Obaya

Dpto. de Matemática Aplicada y Computación, Universidad de Valladolid

vicmun@wmatem.eis.uva.es, sylnov@wmatem.eis.uva.es, rafoba@wmatem.eis.uva.es

Resumen

Una cuestión importante en el estudio de las ecuaciones diferenciales no autónomas consiste en la descripción del comportamiento a largo plazo de las trayectorias. Nos centraremos en el estudio de un modelo compartimental que pasamos a introducir.

Supongamos que tenemos un sistema de n compartimentos $C_1, \ldots, C_n$ entre los que fluye materia a través de unas tuberías; denotamos por $P_{i,j}$ a la tubería que lleva materia del compartimento C_j al C_i para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$. Llamaremos C_0 al entorno en que se encuentra el sistema y, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, x_i será la cantidad de materia que hay en el compartimento C_i. Sea $g_{i,j} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función que determina el caudal de salida de materia desde C_j hacia C_i en función del tiempo t y del valor de x_j en t para $i \in \{0, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, n\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, supondremos que existe un caudal de entrada de materia I_i en el compartimento C_i y que éste solo depende del tiempo.
Con esto, si suponemos que el paso de materia entre los compartimentos no es instantáneo, se tiene que el modelo obedece al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con retardo infinito:

$$x_i'(t) = -g_{0,i}(t, x_i(t)) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} g_{j,i}(t, x_i(t)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \int_{-\infty}^{t} g_{i,j}(\tau, x_j(\tau)) h_{i,j}(t-\tau) d\tau + I_i(t),\ i \in \{1, \ldots, n\},$$

donde $h_{i,j} : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función no negativa con integral 1 y primer momento finito en $[0, +\infty)$ que, para cada $t \in [0, +\infty)$, representa qué parte de materia tarda t en recorrer $P_{i,j}$ de entre toda la materia que dejó C_j hacia C_i en un instante dado para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$.

Bajo ciertas condiciones de admisibilidad para las funciones $g_{i,j}$ que definen el sistema anterior, demostramos la estabilidad de todas sus trayectorias. En el caso de que el sistema sea cerrado o bien asumiendo ciertas condiciones sobre las funciones de entrada y salida de materia en el sistema y las conexiones entre sus compartimentos, se prueban la estabilidad uniforme y la acotación de todas las soluciones.
Podemos entonces aplicar los resultados de [3] para concluir que los conjuntos omega-límite son copias de la base y describir el comportamiento asintótico de las soluciones.
Sección en el CEDYA 2007: EDO

Referencias

[1] J.A. Jacquez, C.P. Simon. *Qualitative theory of compartmental systems.* SIAM Review Vol.35, No.1 (1993), 43-49.

[2] J.A. Jacquez, C.P. Simon. *Qualitative theory of compartmental systems with lags.* Mathematical Biosciences 180 (2002), 329-362.

[3] S. Novo, R. Obaya, A.M. Sanz. *Stability and extensibility results for abstract skew-product semiflows.* J. Differential Equations 235 No. 2 (2007), 623-646.

[4] J. Wu, H.I. Freedman. *Monotone semiflows generated by neutral functional differential equations with application to compartmental systems.* Canadian Journal of Mathematics Vol.43(5) (1991), 1098-1120.