Integrales primeras de Weierstrass en sistemas diferenciales polinomiales planos

Jaume Giné, Maite Grau
Dpto. de Matemáticas, Univ. de Lleida
gine@matematica.udl.es, mtgrau@matematica.udl.es

Resumen

Este trabajo se enmarca en el problema de la integrabilidad de sistemas diferenciales polinomiales planos. Más específicamente estudiaremos sistemas polinomiales de la forma:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x,y), \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \tag{1}$$

donde P y Q son polinomios en $\mathbb{C}[x,y]$. Obviamente, podemos tambien expresar el sistema (1) mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \,. \tag{2}$$

Aunque no siempre podemos resolver explícitamente el sistema (1), podemos ocasionalmente encontrar integrales primeras que son funciones no constantes $H(x,y)$, analíticas en un abierto de $\mathbb{C}^2$ y que son constantes sobre las curvas soluciones de ese conjunto. Para lograr eso consideramos la forma diferencial $Q(x,y)dx - P(x,y)dy = 0$. Si $\partial P/\partial x = -\partial Q/\partial y$, entonces $H(x,y) = \int Qdx - Pdy$ es una integral primera. Si $\partial P/\partial x \neq -\partial Q/\partial y$, en ciertos casos existen métodos ad hoc para encontrar factores integrantes, es decir, una función $R(x,y)$ tal que $\partial(RP)/\partial x = -\partial(RQ)/\partial y$. En el caso en que podamos encontrar esa función R, $H(x,y) = \int RQdx - RPdy$ es una integral primera. Por ejemplo, si $(\partial Q/\partial x + \partial P/\partial y)/P$ es independiente de y, entonces $R = \exp(\int(\partial Q/\partial x + \partial P/\partial y)/Pdx)$ es un factor integrante.

Recordemos que el problema de la integrabilidad consiste en encontrar la clase de funciones más simple a la cual pertenece una integral primera del sistema (1). Por ejemplo en [7], Poincaré estableció el problema de determinar cuando el sistema (1) posee integral primera racional. Los trabajos de [8] y [9] caracterizan cuando un el sistema (1) posee integral primera elemental o Liouvilliana. Una definición precisa de estas clases de funciones es dada en [8, 9]. Un hecho importante en estos resultados es que las curvas invariantes y los factores exponenciales juegan un papel fundamental en la caracterización. Además, la caracterización esta expresada en términos del inverso de factor integrante. En este trabajo, recordaremos y completaremos algunos resultados sobre la integrabilidad del sistema (1) en términos de integrales primeras de Weierstrass.

Sección en el CEDYA 2007: EDO

Referencias

[1] J. Chavarriga, H. Giacomini, J. Giné, and J. Llibre, *Darboux integrability and the inverse integrating factor*, J. Differential Equations **194** (2003), 116–139.

[2] C. Christopher, *Liouvillian first integrals of second order polynomial differential equations*, Electron. J. Differential Equations **1999**, No. 49, 7 pp. (electronic)

[3] I.A. García, H. Giacomini, and J. Giné, *Generalized nonlinear superposition principles for polynomial planar vector fields*, J. Lie Theory **15** (2005), 89–104.

[4] I.A. García, and J. Giné, *Generalized cofactors and nonlinear superposition principles*, Appl. Math. Lett. **16** (2003), 1137–1141.

[5] H. Giacomini, and J. Giné, *An algorithmic method to determine integrability for polynomial planar vector fields*, European J. Appl. Math. **17** (2006), no. 2, 161-170.

[6] P. Painlevé, *Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale est de la forme* $h(x)(y-g_1(x))^{\lambda_1}(y-g_2(x))^{\lambda_2}\cdots(y-g_n(x))^{\lambda_n} = C$, Ann. Fac. Sc. Univ., Toulouse (1896), 1–37; reprinted in Œuvres, tome 2, 546–582

[7] H. Poincaré, *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*, Rend. Circ. Mat. Palermo **5** (1981), 161–191.

[8] M.J. Prelle, and M.F. Singer, *Elementary first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **279** (1983), 215-229.

[9] M.F. Singer, *Liouvillian first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 673-688.