Resolución numérica de problemas evolutivos semilineales sobre dominios irregulares mediante métodos miméticos paralelizables

L. Portero, A. Arrarás, J.C. Jorge

Dpto. de Ingeniería Matemática e Informática, Univ. Pública de Navarra

laura.portero@unavarra.es, andres.arraras@unavarra.es, jcjorge@unavarra.es

Resumen

En este trabajo analizamos una nueva clase de métodos para la resolución numérica eficiente de problemas parabólicos semilineales modelizados mediante la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\mathbf{x})\, \nabla \psi(\mathbf{x},t)) - S(\psi(\mathbf{x},t)) + f(\mathbf{x},t), \qquad (\mathbf{x},t) \in \Omega \times (0,T],$$

acompañada de ciertas condiciones iniciales y de contorno. Suponemos que el dominio espacial $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto y acotado de geometría irregular, K es un tensor simétrico y definido positivo, S es una función no lineal suave y f es un término fuente/sumidero.

La solución numérica de la ecuación anterior se obtiene combinando dos procesos de discretización. En primer lugar, realizamos una integración en tiempo mediante un método Runge-Kutta de pasos fraccionarios linealmente implícito (ver [2]). Para ello consideramos sendas particiones del operador $A \equiv \nabla \cdot (K(\mathbf{x})\, \nabla\ )$ y del término fuente f subordinadas a una descomposición de Ω en un conjunto de subdominios solapados $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$ (ver [3]). Mediante esta integración temporal, el PVIC parabólico original se reduce a un conjunto de problemas de contorno elípticos, uno por cada etapa interna. Puesto que el integrador temporal elegido es de tipo pasos fraccionarios, tan sólo una parte del operador A actúa implícitamente en cada etapa interna. Por otro lado, el hecho de que utilicemos un método linealmente implícito hace que el término no lineal S sea tratado explícitamente y que, por tanto, el problema de contorno obtenido en cada etapa interna sea lineal.

A continuación, este conjunto de problemas elípticos se discretiza en espacio mediante un esquema de diferencias finitas sobre un mallado rectangular lógico; dicho esquema está basado en el método de los operadores-soporte (ver [4]). Dado que la partición para el operador A está subordinada a una descomposición de Ω, el problema elíptico previamente obtenido para cada etapa interna se reduce a un sistema lineal de ecuaciones que involucra incógnitas en tan sólo uno de los subdominios Ω_i. Si además cada uno de estos subdominios Ω_i está formado por un cierto número m_i de componentes conexas disjuntas, este sistema lineal puede descomponerse en un conjunto de m_i subsistemas lineales desacoplados; por ello, su resolución es fácilmente paralelizable. Nótese que la principal ventaja de esta técnica en comparación con métodos clásicos de descomposición de dominios radica en que no es necesario realizar iteraciones de Schwarz. Además, cabe destacar que el esquema totalmente discreto así obtenido preserva algunas propiedades del esquema semidiscreto en tiempo, tales como la simetría y conservación de masa; debido a ello, dicho método se dice mimético (ver [1]).

Finalmente, mostramos un experimento numérico que modeliza flujos de Darcy isotermos en medios porosos anisótropos estratificados con el fin de ilustrar el comportamiento del método numérico propuesto.

Sección en el CEDYA 2007: AN

Referencias

[1] M. Berndt, K. Lipnikov, J.D. Moulton and M.J. Shashkov. Convergence of mimetic finite difference discretizations of the diffusion equation, *East-West J. Numer. Math.* **9**(4) (2001), 253 – 316.

[2] B. Bujanda and J.C. Jorge. Stability results for linearly implicit fractional step discretizations of non-linear time dependent parabolic problems, *Appl. Numer. Math.* **56**(8) (2006), 1061 – 1076.

[3] L. Portero, B. Bujanda and J.C. Jorge. A combined fractional step domain decomposition method for the numerical integration of parabolic problems, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **3019** (2004), 1034 – 1041.

[4] M. Shashkov. *Conservative finite-difference methods on general grids*, Symbolic and Numeric Computation Series, CRC Press, Boca Raton, 1996.