Sobre el control puntual de la ecuación de ondas

Carlos Castro

Dpto. de Matemática e Informática, ETSI Caminos, Canales y Puertos, Univ. Politécnica de Madrid

carlos.castro@upm.es

Resumen

Se considera el problema de control exacto para la ecuación de ondas unidimensional cuando el control actúa sobre una punto $\gamma(t)$ que describe una trayectoria regular sobre el dominio, a lo largo del tiempo $t > 0$. El objetivo de esta comunicación es dar condiciones suficientes sobre la curva $\gamma(t)$ para obtener la controlabilidad del sistema.

Sean $L, T > 0$ y $\gamma : (0,T) \to (0,L)$ una curva parametrizada con valores en el intervalo $(0,L)$. Consideramos el siguiente problema de control: dados $(u^0, u^1) \in L^2(0,L) \times H^{-1}(0,L)$ encontrar una función $f : (0,T) \to R$ tal que la solución del sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_{tt} - u_{xx} = f(t)\delta_{\gamma(t)}(x) & \text{in} & 0 < x < L, \quad 0 < t < T \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{in} & \qquad\qquad\quad\; 0 < t < T \\ u(x,0) = u^0(x), \; u_t(x,0) = v^0(x) & \text{in} & 0 < x < L. \end{array} \right. \tag{1}$$

verifique

$$u(x,T) = u_t(x,T) = 0. \tag{2}$$

En (1) $\delta_{\gamma(t)}$ representa la masa de Dirac concentrada en el punto $x(t)$ y f es el control.

En el caso particular en el que el control actúa en un único punto, es decir $\gamma(t) = x_0 \in (0,L)$ para todo $t \in (0,T)$, se sabe que la respuesta a este problema depende sensiblemente de la posición de x_0. Más concretamente, el sistema es controlable, para un tiempo T suficientemente grande, si el punto x_0 es irracional con respecto a la longitud del intervalo (ver por ejemplo [1]).

Para evitar esta condición tan sensible a la posición del control consideramos trayectorias móviles que tienen la ventaja de atravesar una infinitud de puntos irracionales con la longitud del intervalo L, es decir, para los que el sistema es controlable.

En esta comunicación presentamos el siguiente resultado:

Teorema Sean $T > 2L$, $c > 0$ y supongamos que $\gamma \in C^1(0,T)$ es tal que $c < |\gamma'(t)| \leq 1$ para todo $t \in (0,T)$. Entonces, el sistema (1) es controlable. Más concretamente, para cada dato inicial $(u^0, v^0) \in L^2 \times H^{-1}(0,L)$ existe un control $f \in H^{-1}(0,T)$ tal que la solución u de (1) satisface (2).

Sección en el CEDYA 2007: CO

Referencias

[1] S.A. Avdonin y S.A. Ivanov, *Families of Exponentials. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems*, Cambridge University Press, 1995.