Estudio asintótico de las vibraciones de un cuerpo con una masa concentrada en una superficie

D. Gómez, M. Lobo

Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación, U. de Cantabria

gomezdel@unican.es, miguel.lobo@unican.es

E. Pérez

Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación, U. de Cantabria

meperez@unican.es

Resumen

El problema que aquí consideramos es un modelo matemático sobre las vibraciones de un cuerpo que contiene en su interior una región muy delgada donde la densidad es mucho mayor que en el resto, la denominada *masa concentrada sobre una superficie*. Diversos autores han abordado el comportamiento de sistemas vibratorios con masas concentradas en puntos (cf. [4] para una extensa bibliografía), mientras que sólo tenemos referencia de los trabajos en [1], [2], [3] y [5] relativos a masas concentradas sobre curvas o superficies.

Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^3$ con frontera regular $\partial\Omega$. Supondremos que Ω queda dividido en dos partes Ω_+ y Ω_- por la superficie γ: $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \gamma$. Para simplificar, supondremos que el plano $\{\, x_3 = 0\}$ corta a Ω y que $\gamma = \Omega \cap \{x_3 = 0\}$. Sea ε un pequeño parámetro estrictamente positivo que haremos tender a cero. Denotaremos por ω_ε el entorno de γ de espesor ε, esto es $\omega_\varepsilon = \Omega \cap \{|x_3| < \varepsilon\}$, y por Ω_ε el dominio $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$.

Consideramos en Ω el problema de valores propios:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u^\varepsilon = \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon u^\varepsilon & \text{en } \Omega\,, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega\,, \end{array} \right.$$

donde ρ_ε es la función densidad

$$\rho_\varepsilon(x) = \left\{ \begin{array}{ll} p & \text{si } x \in \Omega_\varepsilon\,, \\ q\varepsilon^{-m} & \text{si } x \in \omega_\varepsilon\,, \end{array} \right.$$

con m un parámetro positivo, y p y q constantes positivas. Para cada $\varepsilon > 0$, sean $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ la sucesión de valores propios de dicho problema y $\{u_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ las correspondientes funciones propias normalizadas en un determinado espacio. Dependiendo del valor que tome el parámetro m aparece distinto comportamiento asintótico de $(\lambda^\varepsilon, u^\varepsilon)$ cuando ε tiende a cero. En [3] caracterizamos el comportamiento asintótico de los valores propios λ_n^ε y de las correspondientes funciones propias u_n^ε, cuando $\varepsilon \to 0$, esto es, valores propios de orden $O(\varepsilon^{m-1})$ para $m > 1$. Aquí, mediante desarrollos asintóticos, caracterizamos comportamientos límites de frecuencias propias de otros órdenes de magnitud más grandes, i.e., $\lambda_{n(\varepsilon)}^\varepsilon$ con $n(\varepsilon) \to \infty$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Sección en el CEDYA 2007: EDP

Referencias

[1] Yu. D. Golovaty, D. Gómez, M. Lobo, and E. Pérez. *Asymptotics for the eigenelements of vibrating membranes with very heavy thin inclussions*, C. R. Mecanique **330** (2002), 777–782.

[2] Yu. D. Golovaty, D. Gómez, M. Lobo, and E. Pérez. *On vibrating membranes with very heavy thin inclusions*, Math. Models Methods Appl. Sci. **14** (2004), 987–1034.

[3] D. Gómez, M. Lobo, and E. Pérez. *Sobre vibraciones de baja frecuencia de un cuerpo con una masa concentrada sobre uns superficie*, Actas del XIX CEDYA, Universidad Carlos III.

[4] M. Lobo, and E. Pérez. *Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review*, C.R. Mecanique, **331** (2003), 303–317.

[5] H. Tchatat. "Perturbations Spectrales pour des systèmes avec masses concentrées", Thése 3^{eme} cycle. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI. Paris, 1984.