

Métodos numéricos basados en ecuaciones modificadas para ecuaciones de evolución no lineales con soluciones de tipo compactón

FRANCISCO RUS, FRANCISCO R. VILLATORO

Dpto. de Lenguajes y Ciencias de la Computación, Univ. de Málaga
rusman@lcc.uma.es, villa@lcc.uma.es

Resumen

Los compactones son soluciones de tipo onda solitaria de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que se caracterizan por presentar soporte compacto. Fueron descubiertos por Rosenau y Hyman [1] en la ecuación $K(n, n)$ dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial^3 u^n}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

donde $u(x, t)$ es la amplitud de la onda, x es la coordenada espacial y t es el tiempo. Los compactones son soluciones clásicas sólo para $1 < n \leq 3$, siendo débiles en otro caso. La solución de tipo compactón general de la ecuación (1), para $n \notin \{-1, 0, 1\}$, se puede escribir como [2]

$$u_c(x, t) = \begin{cases} (\alpha \cos^2(\beta(x - x_0 - ct)))^\mu, & |x - x_0 - ct| \leq \frac{\pi}{2\beta}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

donde c es la velocidad del compactón, x_0 la posición de su máximo en $t = 0$, $\alpha = 2cn/(n+1)$, $\beta = (n-1)/(2n)$, y $\mu = 1/(n-1)$.

Para la simulación numérica de la propagación de compactones los métodos pseudo-espectrales en espacio son los más utilizados [1], aunque requieren el uso de disipación artificial (hiperviscosidad) y el uso de filtros paso bajo. Utilizando estos métodos [1] se mostró que los compactones colisionan entre sí de forma robusta, recuperando su forma y propiedades tras la colisión, aunque generando un pequeño residuo de masa nula que marca la posición de la misma. Utilizando métodos numéricos de diferencias finitas [3], de Padé [4] y de elementos finitos [5, 6] parece que este residuo presenta una onda de choque interna (aunque ello no ha sido demostrado de forma rigurosa). Estos métodos también requieren la adición de disipación artificial pero sin filtrado.

El método de ecuaciones modificadas [7] consiste en añadir a la ecuación continua original una serie de términos que conducen a que la solución modificada se parezca más al resultado numérico que la original. Este método también permite el desarrollo de nuevos métodos numéricos de mayor orden.

En este trabajo se presentarán dos nuevos métodos numéricos basados en correcciones de la ecuación modificada del método de diferencias finitas de Ismail-Taha [3], que es de segundo orden en espacio y tiempo. Los nuevos métodos desarrollados son de cuarto y sexto orden en espacio, manteniendo el segundo orden en tiempo. Un análisis de la estabilidad lineal de estos métodos muestra su estabilidad incondicional. Además, dichos métodos preservan el primer invariante de la ecuación $K(n, n)$ de forma exacta.

Los resultados numéricos obtenidos con los nuevos métodos muestran que los fenómenos de carácter espurio que acompañan a los compactones numéricos del método de Ismail-Taha son fuertemente reducidos. El orden de consistencia de estos nuevos métodos numéricos es consistente con el esperado teóricamente.

Sección en el CEDYA 2007: AN

Referencias

- [1] P. Rosenau, J. M. Hyman. *Compactons: Solitons with finite wavelength*. Phys. Rev. Lett., 70 (1993) 564–567.
- [2] P. Rosenau. *On a class of nonlinear dispersive-dissipative interactions*. Physica D, 123 (1998) 525–546.
- [3] M. S. Ismail, T. R. Taha. *A numerical study of compactons*. Math. Comput. Simul., 47 (1998) 519–530.
- [4] F. Rus and F.R. Villatoro. *Padé Numerical Method for the Rosenau-Hyman Compacton Equation*. Math. Comput. Simul., In Press (2007) doi:10.1016/j.matcom.2007.01.016.
- [5] J. de Frutos, M. A. López-Marcos, J. M. Sanz-Serna. *A finite difference scheme for the $K(2, 2)$ compacton equation*. J. Comput. Phys., 120 (1995) 248–252.
- [6] J. Garralón, F. Rus, and F.R. Villatoro. *Compacton Numerically-Induced Radiation in a Fourth-Order Finite Element Method*. WSEAS T. Math., 5 (2006) 89–96.
- [7] F.R. Villatoro, J.I. Ramos. *On the method of modified equations. I-V*. Appl. Math. Comput., 103 (1999) 111–285.