Un teorema de existencia y unicidad de soluciones periódicas en ecuaciones de Liénard lineales a trozos

Jaume Llibre

Dpto. de Matemáticas, Univ. Autónoma de Barcelona

jllibre@mat.uab.cat

Enrique Ponce, Francisco Torres,

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Sevilla

eponcem@us.es, ftorres@us.es

Resumen

La caracterización de la existencia y unicidad de soluciones periódicas para las ecuaciones de Liénard es un problema que ha producido una ingente cantidad de resultados bajo diferentes hipótesis, véase [1]. Un requisito muy común es exigir que las funciones involucradas sean suaves, con lo que no está garantizada la aplicación de estos resultados al caso en que las funciones sean no continuas.

Como un primer paso para resolver este problema se presenta un teorema de existencia y unicidad de soluciones periódicas de una ecuación de Liénard donde los términos de la misma son funciones discontinuas lineales a trozos. En concreto, consideramos una ecuación de la forma $x'' - f(x)x' + g(x) = 0$, donde

$$f(x) = \begin{cases} T_1, & \text{si } x < 0, \\ T_2, & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad , \qquad g(x) = \begin{cases} D_1 x + a, & \text{si } x < 0, \\ D_2 x + b, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En esta ecuación, las funciones f y g son suaves a trozos y discontinuas en el origen. Mediante el clásico cambio de Liénard,

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds, \quad y = F(x) - x'$$

la ecuación anterior se transforma en el sistema

$$\begin{aligned} x' = & \quad F(x) - y, \\ y' = & \quad g(x). \end{aligned}$$

Si bajo la hipótesis de determinantes positivos $D_1, D_2 > 0$, ahora exigimos $a < 0$, $b > 0$, aseguramos la no existencia de equilibrios en las zonas $x \neq 0$. Por otra parte, resulta que este sistema posee un pseudo-equilibrio en el origen.

En el trabajo se estudian las condiciones que implican la inestabilidad del pseudo-equilibrio en el origen y la aparición de una única órbita periódica hiperbólica. Para concluir la unicidad, utilizamos argumentos en el espíritu de resultados análogos, véase [2].

Sección en el CEDYA 2007: EDO

Referencias

[1] Zhang Zhi-Fen et al., *Qualitative Theory of Differential Equations*, Translations of Mathematical Monographs, AMS 101, 1992, Providence, Rhode Island.

[2] W.A. Coppel, *Some Quadratic Systems with at most One Limit Cycle*, Dynamics Reported, vol. 2, John Willey & Sons, 1989, pp. 61–88.