Sobre un resultado de no existecia de soluciones positivas para un problema elíptico en el semi espacio

Sebastián Lorca

Instituto de Alta Investigación, Univ. de Tarapaća, Arica - Chile

slorca@uta.cl

Resumen

Consideremos el problema

$$-\Delta_m u \geq u^p \quad \text{en } \mathbb{R}^N,$$

donde $1 < m < N$ y $m-1 < p < N(m-1)/(N-m)$. Mitidieri y Pohozaev probaron en [7] que no existe solución positiva para ese problema.

Por otro lado, de lo que el autor conoce, no hay un resultado similar para el caso en que la inecuación ocurre en el semi espacio $\mathbb{R}^N_+ = \left\{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\right\}$.

Este tipo de resultados, conocidos como del tipo Liouville, son usados para probar estimaciones a priori de soluciones positivas de problemas en dominios acotados, por ejemplo del tipo: $-\Delta_m u = f(x, u, \nabla u)$ en Ω; $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Esto es especialmente útil cuando este problema asociado es no variacional (ver por ejemplo [1], [2], [3], [4], [5], [8], [9] y [10]). La idea básica es el uso de la técnica de *blow-up* que esencialmente consiste en lo siguiente: suponga por contradicción que existe una sucesión $(u_n)_n$, no acotada en L^∞, de soluciones positivas del problema en Ω antes mencionado. Sea x_n un punto donde el máximo de u_n es alcanzado, un re-escalamiento centrado en x_n y algunas condiciones sobre el crecimiento de f permiten obtener una función limite que es positiva y verifica $-\Delta_m u \geq u^p$ en $\mathbb{R}^N$ o bien en $\mathbb{R}^N_+$.

Existen importantes trabajos en los últimos años, en particular destacamos [2] y [8], en los que se han puesto diferentes condiciones para asegurar que el problema limite esté definido en todo $\mathbb{R}^N$, obteniendo así una contradición con el resultado de [7]. Una vez que se tiene una estimación a priori en la norma L^∞, resultados sobre regularidad permiten obtener estimaciones para la derivada.

Por otro lado, aplicando blow-up también se obtiene una información que no es usada: la función limite verifica además $-\Delta_m u \leq Cu^p$. Presentamos aquí un resultado del tipo Liouville en el cual se usa esa información adicional (ver [6]).

Teorema 1. *Asuma* $1 < m < N$ *y* $m-1 < p < N(m-1)/(N-m)$. *Entonces no existe solución positiva de clase* C^1 *para*

$$u^p \leq -\Delta_m u \leq Cu^p \qquad \text{in } \mathbb{R}^N_+.$$

Lo fundamental en la demostración es el uso de estimaciones locales y desigualdades del tipo Harnack (ver [10] y [11]). Usando este teorema, los resultados obtenidos en [2] y [8] se pueden demostrar fácilmente y generalizar. Mencionamos también que la técnica propuesta es de utilidad para resolver otro tipo de problemas (ver [5])

Sección en el CEDYA 2007: EDP

Referencias

[1] M.-F. Bidaut-Veron & S.I. Pohozaev, *Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems.* J. Anal. Math., 84(2001), 1-49.

[2] C. Azizieh & P. Clément, *A Priori estimates and continuation methods for positive solutions of p-Laplace equations.* J. Differential Equations, 179(2002), 412-428.

[3] B. Gidas & J. Spruck, *Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations.* Comm. Pure and Appl. Math., 34, (1981), 525-598.

[4] B. Gidas & J. Spruck, *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations.* Comm. Partial Differential Equations, 6 (1981), 883-901.

[5] L. Iturriaga & S. Lorca, *Existence and multiplicity results for degenerate elliptic equations with dependence on the gradient.* Boundary Values Problems, aceptada.

[6] S. Lorca, *Nonexistence of Positive Solution for Quasilinear Elliptic Problems in the Half-Space.* Journal of Inequalities and Applications, Vol. 2007 (2007), Article ID 65126.

[7] E. Mitidieri & S.I. Pohozaev, *Nonexistence of positive solutions for quasilinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$. Proc. Steklov Inst. Math., 227(1999), 1-32.

[8] D. Ruiz, *A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems.* J. Differential Equations, 199(2004), 96-114.

[9] J. Serrin, *Local behaviour of solutions of quasilinear equations.* Acta Math., 111(1964), 247-302.

[10] J. Serrin & H. Zou, *Cauchy–Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities.* Acta Math., 189(2002), 79-142.

[11] N. Trudinger, *On Harnarck type inequalities and their applications to quasilinear elliptic equations.* Comm. Pure Appl. Math., 20(1967), 721-747.