Una nueva formulación mixta-primal para el problema de la elasticidad lineal en el plano

M. González

Dpto. de Matemáticas, Univ. da Coruña

mgtaboad@udc.es

T.P. Barrios, L.F. Gatica

Fac. de Ingeniería, Univ. Católica de la Santísima Concepción

tomas@ucsc.cl, lgatica@ucsc.cl

G.N. Gatica

Dpto. de Ingeniería Matemática, Univ. de Concepción

gg@ing-mat.udec.cl

Resumen

Consideramos el problema de la elasticidad lineal en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, acotado y simplemente conexo. Suponemos que la frontera de Ω, Γ, es Lipschitz, y que Γ_D y Γ_N son dos subconjuntos disjuntos de Γ tales que Γ_D tiene medida positiva y $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Dada una fuerza de volumen $\mathbf{f}$ y una tracción $\mathbf{g}$, el problema consiste en determinar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}$ y el de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ de un material lineal elástico e isótropo que ocupa la región Ω:

$$
\begin{array}{rcll}
\boldsymbol{\sigma} & = & \mathcal{C}\,\mathbf{e}(\mathbf{u}) & \text{en } \Omega \\
-\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) & = & \mathbf{f} & \text{en } \Omega \\
\mathbf{u} & = & \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma_D \\
\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} & = & \mathbf{g} & \text{sobre } \Gamma_N\,.
\end{array}
\tag{1}
$$

Denotamos por $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\mathtt{t}}\right)$ el tensor de pequeñas deformaciones y por $\mathcal{C}\,\mathbf{e}(\mathbf{u})$ el tensor de elasticidad determinado por la ley de Hooke:

$$
\mathcal{C}\,\boldsymbol{\zeta} \;:=\; \lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\zeta})\,\mathbf{I} \;+\; 2\,\mu\,\boldsymbol{\zeta} \qquad \forall\,\boldsymbol{\zeta} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2}\,,
$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, λ, $\mu > 0$ son las constantes de Lamé, y $\mathbf{n}$ es la normal unitaria exterior a Γ.

Proponemos una nueva formulación variacional mixta aumentada para el problema (1). La nueva formulación se obtiene al añadir a la formulación de Hu-Washizu un término de mínimos cuadrados de Galerkin, basado en la definición del tensor de deformación en términos del desplazamiento. Probamos que el esquema discreto correspondiente es estable siempre que para aproximar el par desplazamiento-presión se utilice un par estable para el problema de Stokes. Además, es necesario enriquecer adecuadamente el espacio de elementos finitos de las deformaciones. Realizamos el análisis a priori y a posteriori del error, y mostramos experimentos numéricos que confirman los resultados teóricos para el caso en que el par desplazamiento-presión se aproxima usando el mini-elemento.

Sección en el CEDYA 2007: AN

Referencias

[1] D. Braess, *Finite Elements. Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*, Cambridge University Press, 1997.

[2] C. Carstensen y G. Dolzmann, *A posteriori error estimates for mixed FEM in elasticity*, Numer. Math. 81 (1998) 187-209.

[3] J.K. Djoko y B.D. Reddy, *An extended Hu-Washizu formulation for elasticity*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 195, 39&40 (2006) 6330-6346.

[4] V. Girault y P.A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[5] M. Lonsing y R. Verfürth, *A posteriori error estimators for mixed FEM in linear elasticity*, Num. Math. 97 (2004) 757-778.