Sobre la aproximación por elementos finitos de problemas de ondas. Aplicación a problemas de aguas someras

Ramon Codina

Universitat Politècnica de Catalunya

ramon.codina@upc.edu

Resumen

El objetivo fundamental de este trabajo es introducir métodos estabilizados de elementos finitos para la aproximación numérica de la ecuación de ondas hiperbólica escrita en forma mixta. El problema puede escribirse como hallar una función escalar η y un campo vectorial $\boldsymbol{u}$ solución del sistema

$$\partial_t \eta + \nabla \cdot (H\boldsymbol{u}) = 0, \quad \partial_t \boldsymbol{u} + g\nabla\eta = \boldsymbol{0},$$

con las adecuadas condiciones iniciales y de contorno. Los parámetros g y H dependen del problema físico. Estas ecuaciones modelan en particular flujos de aguas someras, en cuyo caso η representa la elevación del agua, $\boldsymbol{u}$ la velocidad media a lo largo de la profundidad H y g es la aceleración de la gravedad.

El objetivo fundamental es explicar por qué el método de elementos finitos estándar de Galerkin aplicado al sistema anterior da lugar a una formulación numérica inestable. Esta inestabilidad se puede evitar mediante el uso de los llamados métodos de estabilización. En particular, la formulación que proponemos se basa en descomponer la incógnita en su componente en el espacio de elementos finitos y un término adicional llamado subescala. La forma de determinar esta subescala de forma aproximada define la formulación de elementos finitos estabilizada. En particular, la formulación que proponemos tiene como características distintivas

- La posibilidad de considerar las subescalas ortogonales al espacio de elementos finitos.
- La posibilidad de considerar que las subescalas son dependientes del tiempo.

Ambos conceptos los aplicamos a la ecuación de ondas, dando lugar a una formulación numérica con propiedades de estabilidad mejores que en el método de Galerkin.

Una vez analizado el modelo básico, discutimos su extensión tanto a las clásicas ecuaciones no lineales de aguas poco profundas como al modelo de Boussinesq modificado. Este último puede escribirse como

$$\begin{aligned}
&\partial_t \eta + \nabla \cdot (H\boldsymbol{u}) + \varepsilon\nabla \cdot (\eta\boldsymbol{u}) + \mu^2 \nabla \cdot \boldsymbol{J}_\eta = 0, \\
&\partial_t \boldsymbol{u} + g\nabla\eta + \varepsilon\boldsymbol{u} \cdot \nabla\boldsymbol{u} + \mu^2 \boldsymbol{J}_u = \boldsymbol{0},
\end{aligned}$$

donde ε y μ son parámetros adimensionales que miden la no linealidad y la dispersividad del modelo, y $\boldsymbol{J}_\eta$ y $\boldsymbol{J}_u$ son campos vectoriales que dependen de $\boldsymbol{u}$. Comentamos diversos aspectos tanto de la extensión del método de estabilización a este caso como de su implementación numérica.

Sección en el CEDYA 2007: AN