Submatriz sudeste más próxima que hace múltiple un valor propio prescrito

Francisco E. Velasco, Juan-Miguel Gracia

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística e I.O., Univ. del País Vasco, Vitoria

franciscoenrique.velasco@ehu.es, juanmiguel.gracia@ehu.es

http://www.vc.ehu.es/campus/centros/farmacia/deptos-f/depme/gracia1.htm

Resumen

Utilizando ideas sobre el radio de estabilidad de matrices reales [3], Malyshev [2] logró una fórmula elegante que resolvió el problema de Wilkinson: Dada una matriz $G \in \mathbb{C}^{q\times q}$ con todos sus valores propios simples hallar la matriz más próxima a G, en la norma espectral, que tenga algún valor propio múltiple. Este problema esperó solución durante tres décadas.

Malyshev [2, Section 6] observó que su fórmula permitía hallar el valor crítico de flameo "flutter analysis" de una matriz $G \in \mathbb{R}^{q\times q}$. Este análisis se utiliza en el estudio de vibraciones peligrosas de estructuras mecánicas tales como las alas de un avión o el tablero de un puente suspendido [4]. Si los valores propios de G son reales y simples, este valor crítico viene dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{f}_{\mathrm{crit}} &:= \min\{\|Y-G\| : Y \in \mathbb{R}^{q\times q} \text{ tiene un valor propio múltiple real}\} \\ &= \min_{x\in\mathbb{R}} \max_{t\geq 0} \sigma_{2q-1} \begin{pmatrix} xI-G & tI \\ O & xI-G \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A partir de $\mathrm{f}_{\mathrm{crit}}$ el valor propio real doble (genéricamente) de Y se bifurca en dos valores propios complejos con parte imaginaria no nula y simples.

En esta comunicación resolvemos el problema de Wilkinson cuando se perturban únicamente los elementos de una submatriz sudeste de G (perturbación estructurada). Supongamos que G está partida en la forma $G = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, D \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $q = n + m$.

Empezamos por la cuestión: Si $z_0 \in \mathbb{C}$ ¿cuál es la distancia desde D al conjunto $\mathcal{M}$ de matrices $X \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tales que z_0 es valor propio múltiple de $G = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & X \end{smallmatrix}\right)$ en el caso de que este conjunto no sea vacío? Para analizar en qué casos $\mathcal{M} = \emptyset$ utilizamos elementos de teoría de control (descomposición de Kalman, par controlable, par observable, forma canónica controladora, ...). En el caso particular en el que z_0 recorra los números imaginarios puros y G sea una matriz estable, averiguamos la distancia mínima d de D a X tal que $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & X \end{smallmatrix}\right)$ tiene un valor propio imaginario múltiple. Este valor d da un margen de seguridad que permite asegurar la acotación de todas las soluciones del sistema diferencial $\dot{x} = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & X \end{smallmatrix}\right) x$, siempre que $\|X - D\| < d$.

Sección en el CEDYA 2007: Otros campos: Análisis matricial.

Referencias

[1] J. B. Hiriart-Urruty and D. Ye. *Sensitivity analysis of all eigenvalues of a symmetric matrix.* Numer. Math. 70 (1995), 45-72.

[2] A.N. Malyshev. *A formula for the* 2*-norm distance from a matrix to the set of matrices with multiple eigenvalues.* Numer. Math. 83 (3) (1999), 443-454.

[3] L. Qiu, B. Bernhardsson, A. Rantzer, E.J. Davison, P.M. Young, J.C. Doyle. *A formula for computation of the real stability radius.* Automatica 31 (6) (1995), 879–890.

[4] A.P. Seyranian and A.A. Mailybaev. *Multiparameter stability theory with mechanical applications.* World Scientific, Sinpapore, 2003.