

Bifurcación silla-nodo de conos invariantes vía bifurcación foco-centro-ciclo límite

VICTORIANO CARMONA

Dpto. Matemática Aplicada II, Univ. de Sevilla

vcarmona@us.es

Resumen

Los sistemas lineales a trozos se utilizan en diferentes disciplinas científicas para modelar una amplia gama de procesos y dispositivos. Dentro de estos sistemas, tienen especial relevancia los sistemas continuos que muestran dos zonas de linealidad y el origen se encuentra en la frontera que separa dichas zonas. Una primera tarea en el estudio de estos sistemas es la determinación del tipo topológico y estabilidad del origen. La estabilidad del origen suele garantizarse determinando funciones de Liapunov, generalmente cuadráticas. La búsqueda de funciones de Liapunov no es una tarea sencilla y además, es bien sabido que la existencia de una función cuadrática de Liapunov no es una condición necesaria de estabilidad. Por lo tanto, resulta necesario el empleo de otras técnicas para garantizar la estabilidad del equilibrio.

Mientras en el caso bidimensional la estabilidad del origen está perfectamente establecida, cuando el sistema no es plano el estudio de la estabilidad del origen no es un problema trivial. Para sistemas en dimensión tres la estabilidad del origen está íntimamente relacionada con la presencia de conos invariantes en el sistema. De hecho, la ausencia de estas superficies invariantes garantiza la estabilidad del origen cuando los autovalores reales de las matrices del sistema tienen parte real negativa. Por el contrario, la presencia de al menos un cono invariante complica fuertemente el estudio de la estabilidad, pues, incluso cuando las dos matrices del sistema son Hurwitz (sus autovalores están en el semiplano izquierdo), el origen puede ser, tal y como se ha demostrado recientemente, inestable.

Por consiguiente, resulta sumamente interesante estudiar la existencia de conos invariantes en el sistema para poder establecer conjuntos abiertos en el espacio de parámetros que garanticen la estabilidad del origen. En resultados previos se demostraba que a lo sumo pueden aparecer dos conos invariantes aislados, y se conjeturaba la existencia de una bifurcación silla-nodo de los mismos.

En esta charla mostraremos que los conos invariantes en el sistema tridimensional se relacionan de forma biunívoca con las órbitas periódicas de ciertos sistemas planos cuadráticos a trozos con dos zonas. Es más, un adecuado cambio de variable permitirá describir los sistemas cuadráticos a trozos como sistemas lineales a trozos con dos zonas no homogéneos y discontinuos. Esta relación entre conos invariantes y órbitas periódicas nos permitirá, entre otros resultados, probar la existencia de la bifurcación silla-nodo conjeturada, obteniendo la expresión analítica que deben satisfacer los parámetros del sistema en esta bifurcación.

(En colaboración con E. Freire, E. Ponce, J. Ros y F. Torres.)