Contrôlabilité exacte d'un fluide visqueux imcompressible non-homogène dans un domaine cylindriqueHiber Djahida,

Hiber_aek@yahoo.fr
Université des Sciences et Technologie (USTOMB)d'Oran, Algérie.

1 Introduction

On considère le cylindre infini

$$\Omega \times \mathbf{R}, \qquad \Omega = \{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 < {R_1}^2 \}.$$

Le mouvement d'un fluide visqueux incompressible non-homogène (en négligeant la diffusion de la densité (non uniforme) est régi par le système d'équations

$$\varrho\big(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_i\big) - \nu \Delta v_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} p, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\nabla \varrho) \cdot \vec{v} = 0, \tag{1.3}$$

où $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ désigne le vecteur vitesse, ϱ la densité, p la pression et ν le coefficient de viscosité.

Si ϱ est constante, le système (1.1) - (1.3) se réduit au système bien connu de Navier-Stokes, nous pourrons consulter par exemple [9]. Les propriétés fondamentales du système (1.1) - (1.3) sont établies dans [1],[10] etc... .

On introduit les coordonnées polaires (r, ϑ)

$$x_1 = r \cos \vartheta, \qquad x_2 = r \sin \vartheta.$$

Si $v_3 \equiv 0$ et si $\vec{v}$, ϱ et p ne dépendent pas de ϑ, on a le

LEMME 1.1. Si $v_1 = -u \sin \vartheta + w \cos \vartheta, v_2 = u \cos \vartheta + w \sin \vartheta$ satisfont à (1.5) avec $u = u(t, r)$ et $w = w(t, r)$ et si $w(t, R_1) = 0$, alors on a

$$w(t, r) = 0, \qquad \frac{\partial \varrho(t, r)}{\partial t} = 0.$$

Pour simplifier les calculs

$$\nu = 1.$$

Alors le système (1.1) - (1.3) se réduit à

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} u + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} u - \frac{1}{r^2} u, \qquad \text{dans} \;\; [0,T] \times [0,R_1] \tag{1.4}$$

NOTE 1. On a

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} u - \frac{1}{r^2} u = \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u)\Big);$$

donc (1.4) peut être écrite dans la forme

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u)\Big). \tag{1.4bis}$$

NOTE 2. Pour déduire (1.4) on a utilisé la relation

$$-\sin\vartheta \sum_{j=1}^{2} v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_j} + \cos\vartheta \sum_{j=1}^{2} v_j \frac{\partial v_2}{\partial x_j} = 0.$$

POSITION DU PROBLEME : Soient donnés un nombre positif T et une fonction $u_0(r)$ définie sur l'intervalle $[0,R_1]$. Notre problème consiste à trouver une fonction $\omega(t)$ telle que la solution de l'équation (1.4) avec la condition initiale

$$u(0,r) = u_0(r) \tag{1.5}$$

et les conditions aux limites

$$u(t,0) = 0, \qquad u(t,R_1) = \omega(t) \tag{1.6}$$

vérifie l'égalité

$$u(T,r) = 0. \tag{1.7}$$

2 Cadre fonctionnel

On définit les deux espaces de Hilbert suivant:

$$L^2_{r,\varrho}(0,R_1) = \left\{ u : \text{mesurable} \,|\, \int_0^{R_1} r\varrho(r)|u(r)|^2 dr < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle u,v\rangle_{L^2_{r,\varrho}(0,R_1)} = \int_0^{R_1} r\varrho(r)u(r)v(r)dr.$$

On introduit aussi

$$H_r(0,R_1) = \left\{ u : \text{mesurable} \,|\, u(0) = u(R_1) = 0,\ \int_0^{R_1} \frac{1}{r}\left|\frac{d(ru(r))}{dr}\right|^2 dr < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle u,v\rangle_{H_r(0,R_1)} = \int_0^{R_1} \frac{1}{r}\frac{d(ru(r))}{dr}\frac{d(rv(r))}{dr}dr.$$

REMARQUE 2.1. Il existe une constante C telle que

$$\|u\|_{L^2_{r\varrho}(0,R_1)} \leq C\|u\|_{H_r} \qquad \forall u \in H_r. \tag{2.1}$$

(2.1) implique que H_r est contenu dans $L^2_{r\varrho}(0,R_1)$ et l'injection de H_r dans $L^2_{r\varrho}(0,R_1)$ est continue.

Mais l'injection est même compacte

REMARQUE 2.2. L'opérateur

$$A_\varrho = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\cdot)\Big)$$

avec les conditions aux limites homogènes est un opérateur auto-adjoint à inverse compacte dans l'espace de Hilbert $L^2_{r\varrho}(0,R_1)$.

REMARQUE 2.3. Les vecteurs propres φ_n correspondants aux valeurs propres λ_n de l'opérateurs A_ϱ constituent une base orthonormale de l'espace $L^2_{r\varrho}(0,R_1)$.

3 Problème de Moments et Contrôlabilité exacte.

Pour démontrer la contrôlabilité exacte de notre problème en appliquant la théorie des moments et en considérant les fonctions propres φ_n associées aux valeurs propres λ_n de l'opérateurs A_ϱ, il est crucial d'établir
$i)$ qu'il existe une constante strictement positive c_1 telle que

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq c_1 \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

$ii)$ que pour tout n, il existe deux constantes strictement positives δ_3 et C telle que

$$|\varphi_n'(R_1)| \ \geq \delta_3 \sqrt{\lambda_n} \exp(-C\sqrt{\lambda_n}) \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

PROPOSITION 3.1. On suppose que la fonction $\varrho(r)$ vérifie la condition

$$\frac{d\varrho(r)}{dr}\Big|_{r=0} = 0, \qquad \Big|\frac{d^2\varrho(r)}{dr^2}\Big| \leq c_0 \quad \forall r \in [0, R_1] \tag{3.1}$$

$(0 \leq c_0 < \frac{2\varrho(0)}{R_1^2})$. Alors il existe deux constantes positives C et S_1 et une constante C_1 telles que

$$\big(\frac{n\pi + C_1}{S_1}\big)^2 - C \leq \lambda_n \leq \big(\frac{n\pi + C_1}{S_1}\big)^2 + C \qquad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{3.2}$$

THEOREME 3.1. Soit $T > 0$. On suppose que

$$u_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \varphi_n(r), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^2 < \infty.$$

Alors il existe un contrôle $\omega(t) \in L^2(0, T)$ tel que la solution $u(r, t)$ de (1.4)-(1.5)-(1.6) satisfait à $u(r, T) = 0$ si et seulement s'il existe une fonction $\omega_1(t)$ qui vérifie la relation

$$\int_0^T \omega_1(t) \exp(-\lambda_n t) dt = \frac{\mu_n \exp(-\lambda_n T)}{R_1 \varphi_n'(R_1)} \quad \forall n \in \mathbf{N} \backslash \{0\}. \tag{3.2}$$

Considérons le problème de moments (3.2) donné plus haut dans l'espace de Hilbert $L^2(0, T)$. Pour le résoudre nous rappelons la théorie de Muntz concernant les sommes exponentielles.

THEOREME 3.2. [8] Supposons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty. \tag{3.3}$$

Alors la famille $\Lambda = \big(\exp(-\lambda_n t)_n\big)$, $n = 1, 2, ..$ est libre (c'est-à-dire les éléments sont linéairement indépendants). En outre, on peut construire une suite qui satisfait à la condition

$$\int_0^T \theta_n(t)\exp(-\lambda_n t)dt = \delta_{nm}, \tag{3.4}$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker (une telle suite est dite "biorthogonale $\theta_n(t)$, $n = 1, 2, \cdots$ à la famille Λ dans l'espace $L^2(0, T)$").

PROPOSITION 3.2. Sous les hypothèses de la Proposition 3.1 et l'hypothèse de non existence de valeurs propres multiples, il existe une suite biorthogonale $\theta_n(t)$, $n = 1, 2, \cdots$ à la famille Λ et une fonction $\omega_1(t)$, qui est donnée par

$$\omega_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \exp(-\lambda_n T)\theta_n(t)}{R_1\varphi'_n(R_1)} \quad \text{pour} \quad n \geq 1 \tag{3.5}$$

REMARQUE 3.1. La fonction $\omega_1(t)$ donnée dans (3.5) est la solution de l'équation des moment.

THÉORÈME .3.3 . Soit $\varrho(r)$ une fonction mesurable vérifiant (3.1) . On suppose en outre qu'il n'existe pas de valeur propre multiple. Alors il existe un $T_1 > 0$ tel que pour $T \geq T_1$, quelque soit $u^0 \in L^2_{r\varrho}(0, R_1)$, il existe un $\omega(\cdot) \in L^2(0, T)$ tel que la solution (v_1, v_2, p, ϱ) du système d'équations (1.1)–(1.3) satisfasse à la relation

$$u(T, r) = 0 \qquad (r \in [0, R_1]$$

References

[1] Antontsev, A. V. Kazhikhov, V. N. Monakhov. Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids (en russe). Nauka, Novosibirsk, 1983; traduction anglaise, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[2] H. O. Fattorini.D. L. Russel.Uniform Bounds on Biorthogonal Functions for Real Exponentials with an Application to The Control Theory of Parabolic Pquations.

[3] H. O. Fattorini. Boundary Control of Temperature Distribution in a Parallelpiped. SIAM. J. Control, Vol 13, N.1 (1975).

[4] D. L. Russel. Controllability and Stabilisability Theory for Linear Partial Differential Equations, Recent progress and open Questions, Siam review, Vol 20, N 4 (1978).

[5] O. Yu. Emanuvilov. Controllability of Parabolic Equations. Sbornik Mathematics Vol. 186 (1995), 879-900.

[6] A. V. Fursikov, O. Yu. Imanuvilov. Controllabily of One Evolution Equation. Lecture Notes Series. 34, Recherch Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul National University, 1996.

[7] W. Krabs. On Moment Theory and Controllability of the Boussinesq Equation on a Bounded Domain. Dif. Int. Equations, 2002.

[8] L. Schwartz. Etude des sommes d'exponentielles. Deuxième édition. Hermann, 1959.

[9] A. V. Kazhikhov. Résolubilité du problème de Cauchy et aux limites pour l'équation de mouvement pour les fluides visqueux incompressibles non-homogènes (en russe). Dokl. Akad. Nauk. vol. 216 (1874), pp. 1008–1010.

[10] O. A. Ladyzhenskaya. Problèmes mathématiques de dynamique des fluides visqueux incompressibles (II^e éd. russe). Nauka, Moscou, 1970; traduction anglaise sous le titre "The mathematical theory of viscous incompressible flow", Gordon & Breach, New York, 1969.

[11] J.-L. Lions. Contrôlabilité exacte, Perturbation et stabilisation des systèmes distribués Tome 2, Recherche en Mathématiques appliquées ,1988.