

Sevilla, 24 - 28 septiembre 2007

2007



XX CONGRESO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y APLICACIONES  
X CONGRESO DE MATEMÁTICA APLICADA      Universidad de Sevilla

↑  
cedya

# PROGRAMA

# RESÚMENES



*Programa  
y  
Resúmenes*

XX CONGRESO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y APLICACIONES  
X CONGRESO DE MATEMÁTICA APLICADA

*Sevilla, 24-28 septiembre 2007*



SēMA





Hora	Lunes, 24	Martes, 25	Miércoles, 26	Jueves, 27	Viernes, 28
8:30-9:00	Registro				
9:00-9:45		Y. Brenier	R. Caflisch	J.D. Rossi	J. Llibre
9:45-10:30	Apertura	P. Cannarsa	M. Tucsnak	G. Deco	G. Dal Maso
10:30-11:00	café	café	café	café	café
11:00-11:45	C. Parés	E. Freire	Comunicaciones (5 paralelas)	Comunicaciones (5 paralelas)	Comunicaciones (5 paralelas)
11:45-13:45	Comunicaciones (4 paralelas)	Comunicaciones (4 paralelas)			
13:45-15:45	almuerzo	almuerzo	almuerzo	almuerzo	almuerzo
15:45-17:15	Ses. monográf. 2 (Sala 4) Ses. monográf. 7 (Sala 5)	Ses. monográf. 3 (Sala 4) Ses. monográf. 9 (Sala 5)	Sesión Especial Homenaje (16:00-19:30)	Ses. monográf. 6 (Sala 4) Ses. monográf. 10 (Sala 5)	Ses. monográf. 4 (Sala 4) Ses. monográf. 8 (Sala 5)
17:15-18:45	Comunicaciones (4 paralelas)	Comunicaciones (4 paralelas)		(17:30) Mesa Redonda	Ses. monográf. 5 (Sala 4) Ses. monográf. 1 (Sala 5)
18:45-19:30		Premios y Asamblea SEMA (19:00)			M.J. Gander
20:00-21:00	Cóctel Bienvenida		Visita turística (20:30)		Clausura
21:00-				Banquete Congreso	



## INTRODUCCIÓN

El objetivo fundamental del Congreso CEDYA - CMA es servir de encuentro a quienes desarrollan su labor investigadora en los distintos campos de las Ecuaciones Diferenciales, el Análisis Numérico y sus aplicaciones, así como fomentar la incorporación de nuevos aspectos de la Matemática Aplicada. Los temas del Congreso son (entre otros) los siguientes: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Ecuaciones en Derivadas Parciales, Optimización y Control, Análisis Numérico, Cálculo Científico y Computacional, Modelos y Aplicaciones Industriales, Teoría de la Aproximación, etc.

Los primeros CEDYA tuvieron lugar a finales de los 70 y principios de los 80 en Barcelona, Madrid, Santiago de Compostela, Sevilla, La Laguna, etc. Sirvieron en gran medida para consolidar un grupo de investigadores que posteriormente cristalizó y quedó estructurado como núcleo de la Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA). Los últimos CEDYA, ahora denominados CEDYA - CMA, han tenido lugar en Salamanca (2001), Tarragona (2003) y Leganés (2005).

La organización del XX CEDYA - X CMA fue en su día encomendada al Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico de la Universidad de Sevilla por SEMA, quedando fijada como fecha de celebración la semana del 24 al 28 de septiembre de 2007.

Además de las comunicaciones aceptadas (en torno a 180), se contempla en esta edición la participación de 11 conferenciantes plenarios de primer nivel internacional (Yann Brenier, Martin Gander, Carlos Parés, Jaume Llibre, etc.) y la celebración de 10 sesiones monográficas sobre temas de gran interés (Sistemas dinámicos en mecánica celeste, Sistemas dinámicos no autónomos y estocásticos, Avances recientes en biología matemática, etc.). Como actividad adicional al Congreso, el Departamento organizador rinde un modesto homenaje a varios investigadores que han colaborado con sus miembros a lo largo de muchos años y han tenido una significación muy especial en su devenir.

Tenemos un gran placer en dar nuestra bienvenida a todos los participantes. Esperamos no haber cometido demasiados fallos de organización (o al menos que no se noten mucho) y deseamos un feliz Congreso a todos.

*El Comité Organizador  
Sevilla, Septiembre 2007*





## ORGANIZACIÓN

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO  
Facultad de Matemáticas  
Universidad de Sevilla

## COMITÉ DE HONOR

Excm. Sr. Presidente de la Junta de Andalucía  
D. Manuel Chaves González

Excma. Sra. Ministra de Educación y Ciencia  
D<sup>a</sup> Mercedes Cabrera Calvo-Sotelo

Excmo. Sr. Rector de la Universidad de Sevilla  
D. Miguel Florencio Lora

## COMITÉ ORGANIZADOR

Enrique Fernández Cara (Universidad de Sevilla)

Juan Casado Díaz (Universidad de Sevilla)

Anna Doubova Krasotchenko (Universidad de Sevilla)

Rosa Echevarría Líbano (Universidad de Sevilla)

Daniel Franco Coronil (Universidad de Sevilla)

Jorge Galán Vioque (Universidad de Sevilla)

M. José Garrido Atienza (Universidad de Sevilla)

Inmaculada Gayte Delgado (Universidad de Sevilla)

Manuel de León (CSIC)

Mercedes Marín Beltrán (Universidad de Córdoba)

Pedro Marín Rubio (Universidad de Sevilla)

M. Ángeles Rodríguez Bellido (Universidad de Sevilla)

Carlos Vázquez Cendón (Universidad de La Coruña)

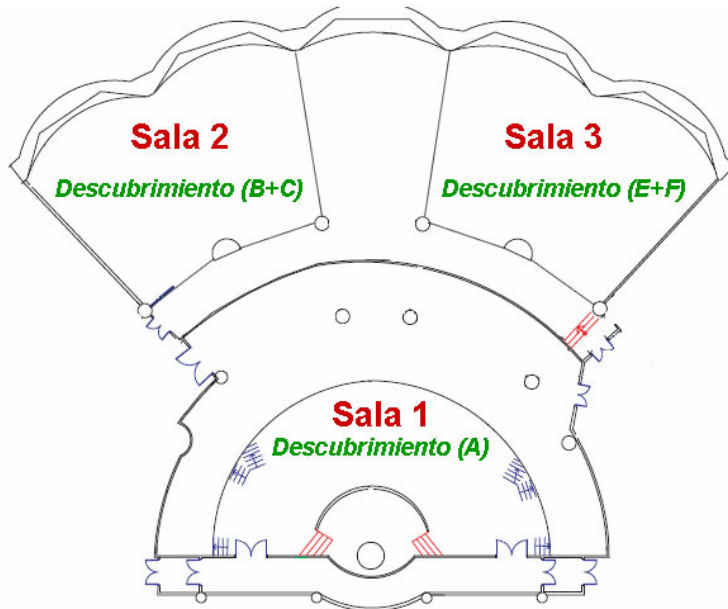
## COMITÉ CIENTÍFICO

- L. Alseda (Universidad Autónoma de Barcelona, España)
- J. M. Arrieta (Universidad Complutense, Madrid, España)
- M. Calvo (Universidad de Zaragoza, España)
- J. Casado (Universidad de Sevilla, España)
- V. Caselles (Universidad Pompeu Fabre, Barcelona, España)
- J. J. Climent (Universidad de Alicante, España)
- S. N. Chow (Georgia Institute of Technology, Atlanta, Estados Unidos)
- I. S. Duff (Computational Science and Engineering Department, Rutherford Appleton Laboratory, Gran Bretaña)
- E. Fernández Cara (Universidad de Sevilla, España)
- G. Francfort (Université Paris-Nord, Francia)
- A. Martínez Finkelshtein (Universidad de Almería, España)
- J. I. Montijano (Universidad de Zaragoza)
- A. Stuart (Warwick Mathematics Institute, Gran Bretaña)

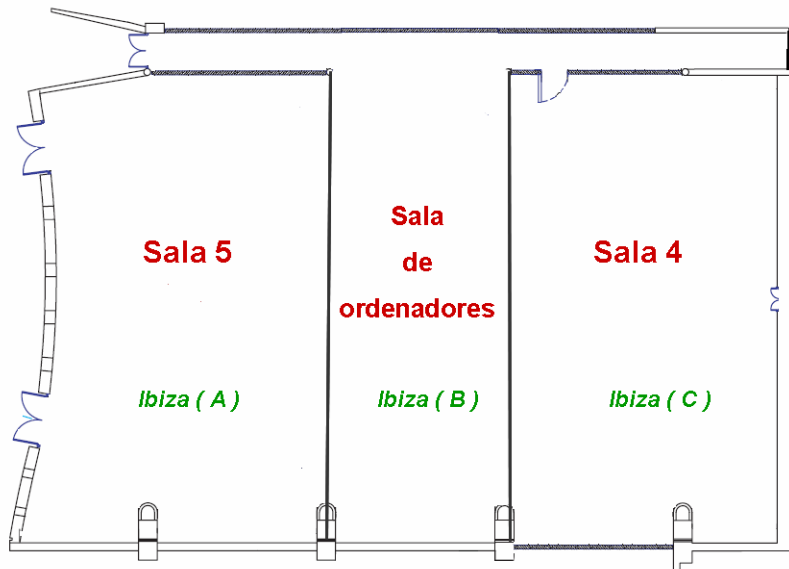
## LUGAR DE CELEBRACIÓN

HOTEL AL-ANDALUS PALACE  
*Avda. de la Palmera s/n*  
41012- SEVILLA  
Tlf.:+34 954 230 600  
Fax: +34 954 231 912





SALÓN DESCUBRIMIENTO. Planta sótano.



SALÓN IBIZA. Planta sótano.

## ÍNDICE

<b>Horario</b>	<b>2</b>
<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>Organización</b>	<b>7</b>
<b>Comité de Honor</b>	<b>7</b>
<b>Comité Organizador</b>	<b>7</b>
<b>Comité Científico</b>	<b>8</b>
<b>Lugar de Celebración</b>	<b>9</b>

## CONFERENCIAS PLENARIAS

<b>Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems. Application to shallow water models</b>	<b>41</b>
<i>Carlos Parés Madroñal</i>	
<i>Lunes 24, Hora 11:00, Sala 1</i>	
<b><math>L^2</math> formulation of some hyperbolic conservation laws</b>	<b>42</b>
<i>Yann Brenier</i>	
<i>Martes 25, Hora 9:00, Sala 1</i>	
<b>Semiconcave functions and their applications to PDEs and control theory</b>	<b>43</b>
<i>Piermarco Cannarsa</i>	
<i>Martes 25, Hora 9:45, Sala 1</i>	
<b>Piecewise linear system dynamics</b>	<b>44</b>
<i>Emilio Freire Macías</i>	
<i>Martes 25, Hora 11:00, Sala 1</i>	
<b>Hybrid Monte Carlo methods for fluid and plasma dynamics</b>	<b>45</b>
<i>Russel E. Caflisch</i>	
<i>Miércoles 26, Hora 9:00, Sala 1</i>	
<b>Self-propelled motions of solids in a fluid: mathematical analysis and control problems</b>	<b>46</b>
<i>Marius Tucsnak</i>	
<i>Miércoles 26, Hora 9:45, Sala 1</i>	

<b>How to approximate the heat equation with Neumann boundary conditions by nonlocal diffusion problems</b>	<b>47</b>
<i>Julio D. Rossi</i>	
<i>Jueves 27, Hora 9:00, Sala 1</i>	
<b>Neurodynamical mechanisms underlying decision-making: the role of statistical fluctuations</b>	<b>48</b>
<i>Gustavo Deco</i>	
<i>Jueves 27, Hora 9:45, Sala 1</i>	
<b>On the limit cycles of the Lienard differential systems</b>	<b>49</b>
<i>Jaume Llibre</i>	
<i>Viernes 28, Hora 9:00, Sala 1</i>	
<b>Quasi-static evolution problems in plasticity with softening</b>	<b>50</b>
<i>Gianni Dal Maso</i>	
<i>Viernes 28, Hora 9:45, Sala 1</i>	
<b>Time parallel methods: Is it possible to predict the far future, before the near future is known accurately ?</b>	<b>51</b>
<i>Martin Gander</i>	
<i>Viernes 28, Hora 18:45, Sala 1</i>	

SESIÓN MONOGRÁFICA 2. LUNES 24. HORA 15:45. SALA 4  
DYNAMICS AND BIFURCATION IN PIECEWISE SMOOTH SYSTEMS

<b>Smooth and non-smooth bifurcation curves in power electronic converters</b>	<b>55</b>
<i>Tere Martínez Seara</i>	
<b>Complementarity systems: an introduction</b>	<b>56</b>
<i>Enric Fossas Colet</i>	
<b>Bifurcación silla-nodo de conos invariantes vía bifurcación foco-centro-ciclo límite</b>	<b>57</b>
<i>Victoriano Carmona Centeno</i>	

SESIÓN MONOGRÁFICA 7. LUNES 24. HORA 15:45. SALA 5  
APPROXIMATION THEORY AND SPECIAL FUNCTIONS WITH APPLICATIONS

<b>Asymptotic methods for convolution integrals unified and demystified</b>	<b>61</b>
<i>José Luis López García</i>	

<b>Rational spectral transformations and orthogonal polynomials</b>	<b>62</b>
<i>Francisco Marcellán Español</i>	
<b>Transformadas de Dunkl y teoremas de muestreo</b>	<b>63</b>
<i>Juan Luis Varona</i>	
SESIÓN MONOGRÁFICA 3. MARTES 25. HORA 15:45. SALA 4 NON-AUTONOMOUS AND STOCHASTIC DYNAMICAL SYSTEMS	
<b>Introduction to the theory of non-autonomous and stochastic/random dynamical systems</b>	<b>67</b>
<i>Peter E. Kloeden</i>	
<b>Estado actual y problemas abiertos de la teoría de sistemas dinámicos no autónomos y/o estocásticos</b>	<b>68</b>
<i>José Antonio Langa</i>	
<b>Structure and continuity properties of attractors for non-autonomous dynamical systems</b>	<b>69</b>
<i>James C. Robinson</i>	
SESIÓN MONOGRÁFICA 9. MARTES 25. HORA 15:45. SALA 5 GOAL ORIENTED ADAPTIVE METHODS FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF PDES	
<b>Coupling multimodeling with local mesh refinement</b>	<b>73</b>
<i>Malte Braack</i>	
<b>Adaptive space-time finite element methods for parabolic optimization</b>	<b>74</b>
<i>Boris Vexler</i>	
<b>A time-space adaptive semi-DWR method</b>	<b>75</b>
<i>Jaime Carpio Huertas</i>	
SESIÓN MONOGRÁFICA 6. JUEVES 27. HORA 15:45. SALA 4 MATHEMATICS FOR HEALTH SCIENCES	
<b>La Bioestadística: una disciplina fundamental en investigación biomédica</b>	<b>79</b>
<i>Carmen Cadarso Suárez</i>	
<b>Mathematical models of stroke</b>	<b>80</b>
<i>Emmanuelle Grenier</i>	

<b>Simulación numérica de diversos problemas relativos al crecimiento de tumores sólidos</b>	<b>81</b>
<i>Mercedes Marín Beltrán</i>	

SESIÓN MONOGRÁFICA 10. JUEVES 27. HORA 15:45. SALA 5  
CONVOLUTIONAL CODES

<b>Algebraic-Geometric constructions of convolutional codes</b>	<b>85</b>
<i>José María Muñoz Porras</i>	
<b>Use of (generalized) systematic encoders in the analysis of a convolutional code</b>	<b>86</b>
<i>Raquel Pinto</i>	
<b>Construction of Convolutional Codes with a Designed Parameters from Linear System Viewpoint</b>	<b>87</b>
<i>M. Carmen Perea Marco</i>	

SESIÓN MONOGRÁFICA 4. VIERNES 28. HORA 15:45. SALA 4  
INVERSE PROBLEMS AND CONTROL THEORY FOR PDES

<b>A 0-Laplacian approach to impedance imaging</b>	<b>91</b>
<i>Yves Capdeboscq</i>	
<b>Parameter identification and applications in ultrasonic bio-imaging</b>	<b>92</b>
<i>Jérôme Fehrenbach</i>	
<b>Cloaking: a new phenomena in Electromagnetism and Elasticity</b>	<b>93</b>
<i>Graeme Milton</i>	

SESIÓN MONOGRÁFICA 8. VIERNES 28. HORA 15:45. SALA 5  
RECENT ADVANCES IN THE MATHEMATICAL AND NUMERICAL ANALYSIS OF OCEANOGRAPHY

<b>Modelización numérica del flujo en aguas poco profundas: Aplicación a rías y estuarios</b>	<b>97</b>
<i>Luis Cea</i>	
<b>Modelado numérico de la capa límite turbulenta en presencia de efectos de flotabilidad</b>	<b>98</b>
<i>Macarena Gómez Mármol</i>	



<b>Simulación de corrientes de marea en el Estrecho de Gibraltar mediante modelos bicapa 2D de aguas someras</b>	<b>99</b>
<i>José Manuel González Vida</i>	

SESIÓN MONOGRÁFICA 5. VIERNES 28. HORA 17:15. SALA 4  
BOSE-EINSTEIN CONDENSATION

<b>Modelling of rotating Bose-Einstein condensates</b>	<b>103</b>
<i>Xavier Blanc</i>	

<b>Open mathematical problems in mean field models for Bose Einstein condensation</b>	<b>104</b>
<i>Victor M. Pérez García</i>	

<b>The onset of interference effects during the formation of Bose Einstein condensate</b>	<b>105</b>
<i>Juan José López Velázquez</i>	

SESIÓN MONOGRÁFICA 1. VIERNES 28. HORA 17:15. SALA 5  
DYNAMICAL SYSTEMS AND CELESTIAL MECHANICS

<b>KAM theory in celestial mechanics</b>	<b>109</b>
<i>Luigi Chierchia</i>	

<b>Una aproximación geométrica a la estabilidad de sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad</b>	<b>110</b>
<i>Víctor Lanchares</i>	

<b>Celestial mechanics on the microscopic scale</b>	<b>111</b>
<i>Turgay Uzer</i>	

COMUNICACIONES. LUNES 24 (MAÑANA) SALA 1.  
*Análisis Teórico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*

<b>Asymptotic behaviour of a singularly perturbed convection-diffusion problem in a rectangle with discontinuous Dirichlet data</b>	<b>115</b>
<i>Ester Pérez Sinusúa, José L. López García</i>	
<i>Lunes 24, Hora 11:45, Sala 1</i>	

<b>Aproximación de un modelo de cristales líquidos nemáticos con un esquema completamente discreto y penalizado</b>	<b>116</b>
<i>Juan Vicente Gutiérrez Santacreu, Francisco Guillén González</i>	
<i>Lunes 24, Hora 12:05, Sala 1</i>	
<b>Well-posedness and asymptotic behaviour for the Boussinesq system in <math>R^n</math></b>	<b>117</b>
<i>Elder Jesús Villamizar Roa, Lucas Catao F. Ferreira</i>	
<i>Lunes 24, Hora 12:25, Sala 1</i>	
<b>Sobre un modelo matemático en morfogénesis</b>	<b>118</b>
<i>J. Ignacio Tello del Castillo</i>	
<i>Lunes 24, Hora 12:45, Sala 1</i>	
<b>Multiplicidad de soluciones estacionarias para un modelo climático con una condición de contorno difusiva no lineal</b>	<b>119</b>
<i>Lourdes Tello del Castillo, J. Idefonso Diaz</i>	
<i>Lunes 24, Hora 13:05, Sala 1</i>	
<b>Dinámica de una ecuación de reacción-difusión con discontinuidades</b>	<b>120</b>
<i>José Valero, José M. Arrieta, Aníbal Rodríguez-Bernal</i>	
<i>Lunes 24, Hora 13:25, Sala 1</i>	
<b>COMUNICACIONES. LUNES 24 (TARDE) SALA 1.</b>	
<i>Análisis Teórico de Ecuaciones en Derivadas Parciales</i>	
<b>Nontrivial compact blow-up sets of lower dimension in a half-space</b>	<b>121</b>
<i>Mayte Pérez Llanos, Julio D. Rossi</i>	
<i>Lunes 24, Hora 17:15, Sala 1</i>	
<b>Análisis de un problema de frontera libre que modela el flujo de hielo polar en un entorno de la grounding line</b>	<b>122</b>
<i>Ana Isabel Muñoz Montalvo, Marco Antonio Fontelos</i>	
<i>Lunes 24, Hora 17:35, Sala 1</i>	
<b>Serie de Chebyshev para un operador Schrödinger 1-D ergódico.</b>	<b>123</b>
<i>Jesús C. Abderramán Marrero, M. A. Sastre, E. Torrano</i>	
<i>Lunes 24, Hora 17:55, Sala 1</i>	
<b>Una simplificación del método de Laplace y aplicaciones.</b>	<b>124</b>
<i>Pedro J. Pagola Martínez, Jose Luis López García, Ester Pérez Sinusía</i>	
<i>Lunes 24, Hora 18:15, Sala 1</i>	

COMUNICACIONES. LUNES 24 (MAÑANA) SALA 2.  
*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*

- Existencia de punto fijo positivo para operadores crecientes. Aplicaciones a un problema de frontera periódico** 125  
*José Ángel Cid Araujo, Alberto Cabada*  
*Lunes 24, Hora 11:45, Sala 2*
- Reduction methods for quasilinear differential-algebraic equations** 126  
*Ricardo Riaza*  
*Lunes 24, Hora 12:05, Sala 2*
- The dynamics around the collinear point  $L_3$  of the RTBP** 127  
*Esther Barrabés Vera, Josep M. Mondelo, Mercè Ollé*  
*Lunes 24, Hora 12:25, Sala 2*
- Estudio de la bifurcación de ciclos límite a partir de un gráfico mediante el inverso de factor integrante** 128  
*Maite Grau Montaña, Isaac A. García, Héctor Giacomini*  
*Lunes 24, Hora 12:45, Sala 2*
- El Problema del Centro en algunas familias polinomiales** 129  
*Paz de Prada Pérez, Jaume Giné*  
*Lunes 24, Hora 13:05, Sala 2*

COMUNICACIONES. LUNES 24 (TARDE) SALA 2.  
*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*

- Conexiones globales en Sistemas Tridimensionales Lineales a Trozos** 130  
*Elisabeth García Medina, Victoriano Carmona Centeno, Fernando Fernández-Sánchez, Antonio E. Teruel Aguilar*  
*Lunes 24, Hora 17:15, Sala 2*
- Evolución paramétrica del sistema de Lorenz** 131  
*Roberto Barrio Gil, Sergio Serrano, Fernando Blesa*  
*Lunes 24, Hora 17:35, Sala 2*
- Some qualitative results on magnetic vector fields** 132  
*Daniel Peralta Salas*  
*Lunes 24, Hora 17:55, Sala 2*

COMUNICACIONES. LUNES 24 (MAÑANA) SALA 4.  
*Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*

**Los elementos finitos de alto orden (hp-FEM) como método de cálculo en problemas de estabilidad fluidodinámica** 133

*Maite Peña Alcaraz, Leo Miguel González Gutiérrez, Vassilis Theofilis*  
*Lunes 24, Hora 11:45, Sala 4*

**Un problema inverso emergente en el estudio de los movimientos con rotaciones intrínsecas no coaxiales de un disco** 134

*Ángel Manuel Ramos, Gabriel Barcelo, Jesús Ildefonso Díaz*  
*Lunes 24, Hora 12:05, Sala 4*

**A stabilized difference scheme for deformable porous media and its numerical resolution on block-structured grids by multigrid methods** 135

*Carmen Rodrigo Cardiel, Francisco Gaspar, Francisco Lisbona*  
*Lunes 24, Hora 12:25, Sala 4*

**Métodos numéricos basados en ecuaciones modificadas para ecuaciones de evolución no lineales con soluciones de tipo compactón** 136

*Francisco Rus Mansilla, Francisco R. Villatoro*  
*Lunes 24, Hora 12:45, Sala 4*

**Sobre el método de Godunov para sistemas hiperbólicos no conservativos** 137

*María Luz Muñoz Ruiz, Carlos Parés Madroñal*  
*Lunes 24, Hora 13:05, Sala 4*

**Multigrid methods and automatic segmentation: an application to CT images of the liver** 138

*Juan Francisco Garamendi Bragado, N. Malpica, Emanuele Schiavi*  
*Lunes 24, Hora 13:25, Sala 4*

COMUNICACIONES. LUNES 24 (TARDE) SALA 4.  
*Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*

**Error estimates of optimal order in a fractional-step scheme for the 3D Navier-Stokes equations** 139

*M. Victoria Redondo Neble, Francisco Guillén González*  
*Lunes 24, Hora 17:15, Sala 4*

**Un esquema de alto orden basado en un esquema MUSTA para problemas hiperbólicos no conservativos** 140  
*Alberto Pardo Milanés, Carlos Parés Madroñal, Manuel Jesús Castro Díaz*  
*Lunes 24, Hora 17:35, Sala 4*

**Algunos elementos para la construcción de un Método de Multiescala Variacional “a posteriori”** 141  
*Antonio Domínguez Delgado, Tomás Chacón Rebollo*  
*Lunes 24, Hora 17:55, Sala 4*

**A domain decomposition method derived from the Primal Hybrid formulations for 2nd order elliptic problems** 142  
*Eliseo Chacón Vera, Tomás Chacón Rebollo, Cristina Bernardi*  
*Lunes 24, Hora 18:15, Sala 4*

COMUNICACIONES. LUNES 24 (MAÑANA) SALA 5.  
*Control y Optimización*

**KKT-invidia en optimización vectorial no regular con restricciones de desigualdad** 143  
*Beatriz Hernández Jiménez, Rafaela Osuna Gómez, Marko Antonio Rojas Medar*  
*Lunes 24, Hora 11:45, Sala 5*

**Aproximación de homeomorfismos Hölder por homeomorfismos afines a trozos** 144  
*José Carlos Bellido Guerrero, Carlos Mora Corral*  
*Lunes 24, Hora 12:05, Sala 5*

**Optimal internal stabilization of the linear system of elasticity** 145  
*Francisco Periago Esparza, Arnaud Munch, Pablo Pedregal Tercero*  
*Lunes 24, Hora 12:25, Sala 5*

**An optimal design problem in wave propagation** 146  
*Alberto Donoso, José Carlos Bellido Guerrero*  
*Lunes 24, Hora 12:45, Sala 5*

**Equilibrio de Nash para un problema de control multiobjetivo relacionado con la depuración de aguas residuales** 147  
*Rafael Muñoz Sola, Miguel Ernesto Vázquez, Néstor García Chan*  
*Lunes 24, Hora 13:05, Sala 5*

**Relajación de problemas de control en los coeficientes con un funcional dependiendo del gradiente** 148

*Julio Couce Calvo, Juan Casado Díaz, José D. Martín Gómez*  
*Lunes 24, Hora 13:25 , Sala 5*

COMUNICACIONES. LUNES 24 (TARDE) SALA 5.  
*Control y Optimización*

**Optimal control problem for the generalized bioconvective flow** 149

*Marko A. Rojas Medar, Rogerio de Aguiar, Jaime Ortega, María Drina Rojas*  
*Lunes 24, Hora 17:15, Sala 5*

**Null controllability results for parabolic equations in unbounded domains** 150

*Luz de Teresa, Manuel González Burgos*  
*Lunes 24, Hora 17:35, Sala 5*

**Control de EDPs orientado a la terapia de un tumor cerebral** 151

*Rosa Echevarría Líbano, Anna Doubova Krasotchenko, Enrique Fernández Cara, Inmaculada Gayte Delgado*  
*Lunes 24, Hora 17:55 , Sala 5*

COMUNICACIONES. MARTES 25 (MAÑANA) SALA 1.  
*Análisis Teórico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*

**Standing Waves for Some Systems of Coupled Nonlinear Schrödinger Equations** 155

*Eduardo Colorado Heras, A. Ambrosetti*  
*Martes 25, Hora 11:45, Sala 1*

**Puntos de retroceso y soluciones resonantes en ramas no acotadas de soluciones** 156

*Rosa Pardo, José M. Arrieta, Anibal Rodríguez Bernal*  
*Martes 25, Hora 12:05, Sala 1*

**Perturbación y decaimiento en ecuaciones parabólicas no autónomas** 157

*Anibal Rodríguez Bernal*  
*Martes 25, Hora 12:25, Sala 1*

**Lie Symmetries, qualitative analysis and exact solutions of nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities** 158

*Juan Belmonte Beitia, Victor M. Pérez García, Vadym Vekslerchik, Pedro J. Torres*  
*Martes 25, Hora 12:45, Sala 1*

**Connecting steady states of a discrete diffusive energy balance climate model via controllability results** 159

*Victor José García Garrido, Jesús Ildefonso Díaz*  
*Martes 25, Hora 13:05, Sala 1*

COMUNICACIONES. MARTES 25 (TARDE) SALA 1.  
*Análisis Teórico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*  
*Otros*

**Comportamiento asintótico del modelo  $\alpha$ -Navier-Stokes 3D con retardos.** 160

*Antonio Miguel Márquez Durán, Tomás Caraballo Garrido, José Real Anguas*  
*Martes 25, Hora 17:15, Sala 1*

**Existencia y unicidad de soluciones fuertes para las ecuaciones de los fluidos micropolares en dominios de  $R^3$**  161

*José Luiz Boldrini, Marko Antonio Rojas Medar, Mario Durán*  
*Martes 25, Hora 17:35, Sala 1*

**Polinomios ortogonales de Sobolev con soporte no acotado** 162

*Juan José Moreno Balcázar*  
*Martes 25, Hora 17:55, Sala 1*

COMUNICACIONES. MARTES 25 (MAÑANA) SALA 2.  
*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*

**Origen, motivación y resultados sobre dos ecuaciones no lineales en diferencias** 163

*Francisco Balibrea Gallego, Antonio Linero Bas*  
*Martes 25, Hora 11:45, Sala 2*

**Ciclos límite en campos vectoriales polinomiales utilizando el método de averaging** 164

*Jesús Suárez Pérez del Río, Belén García, Jaume Llibre*  
*Martes 25, Hora 12:05, Sala 2*

**Algunos resultados sobre periodicidad de ecuaciones en diferencias de orden dos y tres** 165

*Antonio Linero Bas, Francisco Balibrea Gallego*  
*Martes 25, Hora 12:25, Sala 2*

**Skew-product maps with base having closed set of periodic points** 166

*Juan Luis García Guirao, Miguel Ángel López Guerrero*  
*Martes 25, Hora 12:45, Sala 2*

COMUNICACIONES. MARTES 25 (TARDE) SALA 2.  
*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*

- Extrapolación Polinómica Recíproca para Sistemas de EDO's** 167  
*Fernando Manzano García, Sergio Amat Plata*  
*Martes 25, Hora 17:15, Sala 2*
- Equi-atracción y dependencia continua de atractores para ecuaciones con retardo** 168  
*Pedro Marín Rubio, Peter E. Kloeden*  
*Martes 25, Hora 17:35, Sala 2*
- Positivity-preserving for Runge-Kutta methods** 169  
*Inmaculada Higuera Sanz, Teo Roldán Marrodan*  
*Martes 25, Hora 17:55, Sala 2*
- Dinámica para un modelo compartimental no lineal y no autónomo** 170  
*Víctor Muñoz, Sylvia Novo, Rafael Obaya*  
*Martes 25, Hora 18:15, Sala 2*

COMUNICACIONES. MARTES 25 (MAÑANA) SALA 4.  
*Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*

- Estrategias de “semicoarsening” en la aplicación del “smoother” SDI en problemas anisotrópicos tridimensionales** 171  
*José R. Galo Sánchez*  
*Martes 25, Hora 11:45, Sala 4*
- Un método paralelo para flujos de partículas rígidas basado en dominios ficticios** 172  
*Jordi Blasco Lorente, Carmen Calzada Canalejo, Mercedes Marín Beltrán*  
*Martes 25, Hora 12:05, Sala 4*
- Optimal Error Estimate of the Penalty Finite Element Method for Micro-polar Fluids Equations** 173  
*Elva Eliana Ortega Torres, Marko Antonio Rojas-Medar*  
*Martes 25, Hora 12:25, Sala 4*
- Análisis de la convergencia del M.E.F. en algoritmos de descomposición de dominio con adaptación de mallado** 174  
*Maria Manuela Simões, Luis Ferragut Canals*  
*Martes 25, Hora 12:45, Sala 4*



**Aplicaciones de una familia de difusión anisotrópica sobre la evolución de algunos contornos activos** 175  
*Javier Sanguino Botella, Carlos Platero, Maria Carmen Tobar, Pedro M. González, Gabriel Asensio Madrid, José María Poncela Pardo*  
*Martes 25, Hora 13:05, Sala 4*

**Resolución numérica de algunos sistemas parabólico-elípticos no lineales** 176  
*María Teresa González Montesinos, Francisco Ortegón Gallego, José Manuel Díaz Moreno*  
*Martes 25, Hora 13:25, Sala 4*

COMUNICACIONES. MARTES 25 (TARDE) SALA 4.  
*Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*

**Formulación de tipo Petrov-Galerkin de algunos métodos distributivos: Aplicación a las ecuaciones de Navier-Stokes** 177  
*Gladys Narbona Reina, Tomás Chacón Rebollo, Macarena Gómez Mármol*  
*Martes 25, Hora 17:15, Sala 4*

**Métodos Runge-Kutta-Nyström de Pasos Fraccionarios y reducción de orden** 178  
*María Jesús Moreta Santos, Blanca Bujanda Cirauqui, Juan Carlos Jorge Ulecia*  
*Martes 25, Hora 17:35, Sala 4*

**Symmetric boundary element methods for Helmholtz transmission problems** 179  
*María-Luisa Rapún, Antonio Laliena Bielsa, Francisco Javier Sayas*  
*Martes 25, Hora 17:55, Sala 4*

**Fourier-Galerkin methods for boundary integral equations on axisymmetric bodies: theoretical and algorithmic aspects** 180  
*Víctor Domínguez, Francisco Javier Sayas, Norbert Heuer*  
*Martes 25, Hora 18:15, Sala 4*

COMUNICACIONES. MARTES 25 (MAÑANA) SALA 5.  
*Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*

**Estudio de la estabilidad dinámica de pares eje-cojinete en problemas evolutivos de lubricación** 181  
*José Durany Castrillo, José Pereira-Pérez, Fernando Varas*  
*Martes 25, Hora 11:45, Sala 5*

- Crecimiento de burbujas de helio en residuos radiactivos** 182  
*Bárbara Tapiador, Ana Carpio*  
*Martes 25, Hora 12:05, Sala 5*
- Regularización no local de la ecuación de la calor inversa para realzamiento de imágenes digitales** 183  
*Antonio Buades Capo, Bartomeu Coll Vicens, Jean-Michel Morel*  
*Martes 25, Hora 12:25, Sala 5*
- Un esquema de volúmenes finitos de alto orden para las ecuaciones de aguas someras con topografía y áreas secas** 184  
*José M. Gallardo Molina, Manuel Jesús Castro Díaz, Carlos Parés Madroñal*  
*Martes 25, Hora 12:45, Sala 5*
- Resolución numérica de un problema de frontera libre asociado a inversiones con efectos medioambientales irreversibles** 185  
*Iñigo Arregui, Carlos Vázquez Cendón, Antonio Acción*  
*Martes 25, Hora 13:05, Sala 5*
- Diferentes estados vorticales y sus conexiones en el flujo de Poiseuille plano bidimensional** 186  
*Pablo S. Casas*  
*Martes 25, Hora 13:25, Sala 5*
- COMUNICACIONES. MARTES 25 (TARDE) SALA 5.**  
*Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*
- Un modelo de aguas someras con dependencia explícita de la profundidad** 187  
*Raquel Taboada Vázquez, José Manuel Rodríguez Seijo*  
*Martes 25, Hora 17:15, Sala 5*
- Efficient resolution of singularly perturbed coupled systems: Equations of reaction-diffusion type** 188  
*Carmelo Clavero, José Luis Gracia, Francisco Lisbona, Carmen Rodrigo*  
*Martes 25, Hora 17:35, Sala 5*
- Simulación numérica de la combustión de carbón pulverizado** 189  
*Laura Saavedra Lago, Alfredo Bermúdez de Castro, José Luís Ferrín, Amable Liñán*  
*Martes 25, Hora 17:55, Sala 5*
- Un método de elementos finitos mixtos para un problema de interacción sólido-fluido** 190  
*Antonio Márquez Gentil, Salim Meddahi Bouras, Gabriel N. Gatica*  
*Martes 25, Hora 18:15, Sala 5*

COMUNICACIONES. MIÉRCOLES 26 (MAÑANA) SALA 1.  
*Análisis Teórico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*

- Convergence to equilibrium for a hyperbolic/elliptic system modelling the elastic-gravitational deformation of a layered Earth** 193  
*Alicia Arjona Almodóvar, J. Ildefonso Díaz*  
*Miércoles 26, Hora 11:05, Sala 1*
- An extinction delay mechanism for abstract semilinear equations** 194  
*Alfonso Carlos Casal Piga, Jesús Ildefonso Díaz, José Manuel Vegas*  
*Miércoles 26, Hora 11:25, Sala 1*
- Un modelo de tipo Grad-Shafranov para plasmas con simetría helicoidal** 195  
*Juan Francisco Padial Molina, Jesús Ildefonso Díaz*  
*Miércoles 26, Hora 11:45, Sala 1*
- Desigualdades variacionales casilineales elípticas con crecimiento natural en el gradiente** 196  
*Pedro Jesús Martínez Aparicio, David Arcoya Álvarez, José Carmona*  
*Miércoles 26, Hora 12:05, Sala 1*
- Un modelo para la descripción de las transiciones de fases en una barra de acero** 197  
*Concepción García Vázquez, José Manuel Díaz, María Teresa González Montesi-  
nos, Francisco Ortegón Gallego*  
*Miércoles 26, Hora 12:25, Sala 1*
- El modelo BGK con potencial confinante: existencia, comportamiento asintótico y equilibrios Maxwellianos periódicos en tiempo** 198  
*María José Cáceres Granados, Roberta Bosi*  
*Miércoles 26, Hora 12:45, Sala 1*
- Un problema de frontera libre para fluidos no-Newtonianos y aplicación al movimiento de glaciares** 199  
*Marco Antonio Fontelos, Ana Isabel Muñoz Montalvo, Emanuele Schiavi*  
*Miércoles 26, Hora 13:05, Sala 1*

COMUNICACIONES. MIÉRCOLES 26 (MAÑANA) SALA 2.

*Análisis Numérico Matricial*

- La completación de matrices parciales totalmente no negativas: una visión general** 200  
*Ramadán el-Ghamry, Cristina Jordán, Juan Ramón Torregrosa Sánchez*  
*Miércoles 26, Hora 11:05, Sala 2*
- Low rank perturbation of Kronecker structure** 201  
*Fernando de Terán Vergara, Froilán M. Dopico, Julio Moro*  
*Miércoles 26, Hora 11:25, Sala 2*
- Propiedades de las matrices totalmente no positivas** 202  
*Ana M. Urbano Salvador, Rafael Cantó Colomina, Beatriz Ricarte*  
*Miércoles 26, Hora 11:45, Sala 2*
- Determinación de H-matrices** 203  
*Isabel Giménez Manglano, Rafael Bru García, Cristina Corral, José Mas*  
*Miércoles 26, Hora 12:05, Sala 2*
- Métodos numéricos para matrices signo-regulares** 204  
*Vanesa Cortés Utrillas, Juan Manuel Peña*  
*Miércoles 26, Hora 12:25, Sala 2*
- Sobre soluciones reflexivas de la ecuación matricial  $AXB=C$**  205  
*Néstor Thome, Alicia Herrero*  
*Miércoles 26, Hora 12:45, Sala 2*

COMUNICACIONES. MIÉRCOLES 26 (MAÑANA) SALA 3.

*Otros*

- Métodos iterativos multi-punto para ecuaciones no lineales** 206  
*Juan R. Torregrosa Sánchez, Alicia Cordero*  
*Miércoles 26, Hora 11:05, Sala 3*
- Convolución adaptativa, rápida y con poca memoria para ecuaciones de evolución** 207  
*María López Fernández, C. Lubich, A. Schädle*  
*Miércoles 26, Hora 11:25, Sala 3*

- Sobre la región de accesibilidad de ciertas iteraciones de tercer orden** 208  
*Natalia Romero Álvarez, José Antonio Ezquerro Fernández, Miguel Ángel Hernández*  
*Miércoles 26, Hora 11:45, Sala 3*
- Estudio numérico de números de rotación y variacionales de familias paramétricas de difeomorfismos del círculo** 209  
*Alejandro Luque Jiménez, Jordi Villanueva*  
*Miércoles 26, Hora 12:05, Sala 3*
- Un estudio unificado de la convergencia semilocal de métodos tipo Newton de dos puntos en espacios de Banach** 210  
*María Jesús Rubio Crespo, Miguel Angel Hernández*  
*Miércoles 26, Hora 12:25, Sala 3*
- Convergencia y análisis numérico de un método de tercer orden para sistemas de ecuaciones no lineales** 211  
*Sergio Amat Plata, Sonia Busquier, Concepción Bermúdez Edo, Fernando Manzano García, Sergio Plaza*  
*Miércoles 26, Hora 12:45, Sala 3*
- Compression of images with learning multiresolution schemes** 212  
*Dionisio F. Yáñez Avendaño, F. Arandiga, A. Cohen*  
*Miércoles 26, Hora 13:05, Sala 3*

COMUNICACIONES. MIÉRCOLES 26 (MAÑANA) SALA 4.  
*Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*

- Una nueva formulación mixta-primal para el problema de la elasticidad lineal en el plano** 213  
*María González Taboada, Tomas P. Barrios, Gabriel N. Gatica, Luis F. Gatica*  
*Miércoles 26, Hora 11:05, Sala 4*
- Sobre la aproximación por elementos finitos de problemas de ondas. Aplicación a problemas de aguas someras** 214  
*Ramón Codina*  
*Miércoles 26, Hora 11:25, Sala 4*
- Aumento de la eficiencia de un método de descomposición de dominio mediante estimaciones a posteriori** 215  
*Daniel Franco Coronil, Christine Bernardi, Tomás Chacón Rebollo, Eliseo Chacón Vera*  
*Miércoles 26, Hora 11:45, Sala 4*

- Regularization and relaxation tools for interface coupling** 216  
*Edwige Godlewski, Frédéric Coquel, Nicolas Seguin*  
*Miércoles 26, Hora 12:05, Sala 4*
- Estimativos del error a posteriori para problemas de valores iniciales no lineales en el contexto de los espacios de Banach y los semigrupos** 217  
*Eduardo Cuesta Montero, Charalambos Makridakis*  
*Miércoles 26, Hora 12:25, Sala 4*
- Análisis numérico de soluciones autosemejantes de un flujo dispersivo de curvas planas** 218  
*Francisco de la Hoz Méndez*  
*Miércoles 26, Hora 12:45, Sala 4*
- Simulación de una dinámica tumoral afectada por un campo electromagnético** 219  
*Juan Antonio Calzada Delgado, Ana Belén González*  
*Miércoles 26, Hora 13:05, Sala 4*

COMUNICACIONES. MIÉRCOLES 26 (MAÑANA) SALA 5.  
*Control y Optimización*

- Una nueva caracterización de los invariantes por feedback de cocientes de subespacios (A, B)-invariantes** 220  
*Itziar Baragaña Gárate, F. Puerta, I. Zaballa*  
*Miércoles 26, Hora 11:05, Sala 5*
- El cambio de los invariantes por feedback mediante perturbación de columnas** 221  
*Inmaculada de Hoyos Izquierdo, M. Asunción Beitia*  
*Miércoles 26, Hora 11:25, Sala 5*
- Subsistemas singulares de un sistema lineal. Una aproximación a los subespacios cuasiinvariantes** 222  
*Xavier Puerta Coll*  
*Miércoles 26, Hora 11:45, Sala 5*
- Deformaciones miniversales de tensores de segundo orden** 223  
*Josep Clotet Juan, M. Dolors Magret, Marta Peña Carrera*  
*Miércoles 26, Hora 12:05, Sala 5*
- Estructura geométrica de las clases de equivalencia de un par controlable** 224  
*Josep Ferrer Llop, Albert Compta, Marta Peña Carrera*  
*Miércoles 26, Hora 12:25, Sala 5*

<b>El método de los momentos para problemas variacionales no locales</b>	<b>225</b>
<i>Ernesto Aranda Ortega, René Meziat</i>	
<i>Miércoles 26, Hora 12:45, Sala 5</i>	
<b>Control óptimo sobre inestabilidades termoconvectivas</b>	<b>226</b>
<i>María Cruz Navarro Lérica, Henar Herrero</i>	
<i>Miércoles 26, Hora 13:05, Sala 5</i>	
<b>Introducción de penalizaciones de giro en el Problema General de Rutas con Capacidades sobre Grafos Mixtos</b>	<b>227</b>
<i>Eulalia Martínez Molada, David Soler, José Albiach</i>	
<i>Miércoles 26, Hora 13:25, Sala 5</i>	
COMUNICACIONES. JUEVES 27 (MAÑANA) SALA 1.	
<i>Análisis Teórico de Ecuaciones en Derivadas Parciales</i>	
<i>Otros</i>	
<b>Comportamiento asintótico de una viga elástica fijada en pequeñas zonas de uno de sus extremos</b>	<b>231</b>
<i>Manuel Luna Laynez, Juan Casado Díaz, François Murat</i>	
<i>Jueves 27, Hora 11:05, Sala 1</i>	
<b>Metastable patterns for three or more different phases</b>	<b>232</b>
<i>Angela Jiménez Casas</i>	
<i>Jueves 27, Hora 11:25, Sala 1</i>	
<b>Simetrías potenciales de un modelo matemático que describe las vibraciones de una viga</b>	<b>233</b>
<i>María de los Santos Bruzón Gallego, José Carlos Camacho</i>	
<i>Jueves 27, Hora 11:45, Sala 1</i>	
<b>Estudio asintótico de las vibraciones de un cuerpo con una masa concentrada en una superficie</b>	<b>234</b>
<i>Delfina Gómez Gandarillas, Miguel Lobo, María Eugenia Pérez</i>	
<i>Jueves 27, Hora 12:05, Sala 1</i>	
<b>Atractores en dominios tipo dumbbell</b>	<b>235</b>
<i>German Lozada Cruz, José María Arrieta, Alexandre N. Carvalho</i>	
<i>Jueves 27, Hora 12:25, Sala 1</i>	
<b>Asymptotic Expansions of the Hurwitz-Lerch Zeta Function</b>	<b>236</b>
<i>Chelo Ferreira González, José Luis López García</i>	
<i>Jueves 27, Hora 12:45, Sala 1</i>	

COMUNICACIONES. JUEVES 27 (MAÑANA) SALA 2.  
*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*

<b>Integrales primeras de Weierstrass en sistemas diferenciales polinomiales planos</b>	<b>237</b>
<i>Jaume Giné Mesa, Maite Grau Montaña</i>	
<i>Jueves 27, Hora 11:05, Sala 2</i>	
<b><math>J_2</math> effect and the collision restricted three-body problem</b>	<b>238</b>
<i>Josep M. Cors, Esther Barrabés Vera, C. Pinyol, J. Soler</i>	
<i>Jueves 27, Hora 11:25, Sala 2</i>	
<b>Phase portraits of separable Hamiltonian systems</b>	<b>239</b>
<i>Chara Pantazi, Antoni Guillamon</i>	
<i>Jueves 27, Hora 11:45, Sala 2</i>	
<b>Qualitative features of Hamiltonian systems through averaging and reduction</b>	<b>240</b>
<i>Patricia Yanguas Sayas, H. Scott Dumas, Kenneth Meyer, Jesús Palacián Subiela</i>	
<i>Jueves 27, Hora 12:05, Sala 2</i>	
<b>Un Teorema de existencia y unicidad de soluciones periódicas de ecuaciones de Lienard lineales a trozos</b>	<b>241</b>
<i>Francisco Torres Peral, Jaume Llibre, Enrique Ponce</i>	
<i>Jueves 27, Hora 12:25, Sala 2</i>	
<b>Un método RKN diagonalmente implícito para problemas stiff oscilatorios de segundo orden</b>	<b>242</b>
<i>Inmaculada Gómez Ibáñez, José María Franco García</i>	
<i>Jueves 27, Hora 12:45, Sala 2</i>	
<b>Una Bifurcación Global de Orbitas periódicas en Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos</b>	<b>243</b>
<i>Francisco Javier Ros Padilla, Victoriano Carmona Centeno, Enrique Ponce</i>	
<i>Jueves 27, Hora 13:05, Sala 2</i>	
<b>The Restricted 3-Body Problem on <math>S^1</math>: regularization and a particular solution</b>	<b>244</b>
<i>Luis Franco Pérez, Ernesto Pérez Chavela</i>	
<i>Jueves 27, Hora 13:25, Sala 2</i>	



COMUNICACIONES. JUEVES 27 (MAÑANA) SALA 3.  
*Control y Optimización*  
*Otros*

- Variants of global Carleman weights in one-measurement inverse problems and fluid-structure controllability problems** 245  
*Axel Osses, Alberto Mercado, Lucie Baudouin, Muriel Boulakia, Anna Doubova Krasotchenko, Jean Pierre Puel*  
*Jueves 27, Hora 11:05, Sala 3*
- Transformando el modelo posinomial para construir métodos de punto interior globalmente convergentes** 246  
*Natalia Boal Sánchez, Francisco Javier Sayas*  
*Jueves 27, Hora 11:25, Sala 3*
- Problemas de Control en Procesos de Eutrofización.** 247  
*Francisco Javier Fernández Fernández, Lino J. Álvarez Vázquez, Rafael Muñoz Sola*  
*Jueves 27, Hora 11:45, Sala 3*
- Sobre el control puntual de la ecuación de ondas** 248  
*Carlos Castro*  
*Jueves 27, Hora 12:05, Sala 3*
- Un problema de control en los coeficientes para la ecuación de ondas con un actuador** 249  
*Faustino Maestre Caballero, Pablo Pedregal Tercero, Arnaud Münch*  
*Jueves 27, Hora 12:25, Sala 3*
- Un protocolo de votación electrónica basado en firmas digitales ciegas** 250  
*Ángel Martín del Rey, Ana Belén Cabello Pardos, Ascensión Hernández Encinas, Sara Hoya White, Gerardo Rodríguez Sánchez*  
*Jueves 27, Hora 12:45, Sala 3*
- Convolutional decoding through a tracking problem** 251  
*José Ignacio Iglesias Curto, Uwe Helmke*  
*Jueves 27, Hora 13:05, Sala 3*
- Las matrices de Toeplitz en la construcción de códigos convolucionales perforados** 252  
*M. Victoria Herranz Cuadrado, M. Carmen Perea Marco*  
*Jueves 27, Hora 13:25, Sala 3*

COMUNICACIONES. JUEVES 27 (MAÑANA) SALA 4.  
*Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*

- Absorbing boundary conditions in discrete time domain and convolution quadrature BEM-FEM for transient waves** **253**  
*Antonio Laliena Bielsa, Francisco Javier Sayas*  
*Jueves 27, Hora 11:05, Sala 4*
- Métodos linealmente implícitos de tipo Runge-Kutta de pasos fraccionarios aplicados a problemas parabólicos semi-lineales: reducción de orden y técnicas para evitarla** **254**  
*Blanca Bujanda Cirauqui, Juan Carlos Jorge Ulecia*  
*Jueves 27, Hora 11:25, Sala 4*
- Resolución Numérica de un modelo de frontera libre para el crecimiento tumoral** **255**  
*Gema Camacho Vázquez, Carmen Calzada Canalejo, Enrique Fernández Cara, Mercedes Marín Beltrán*  
*Jueves 27, Hora 11:45, Sala 4*
- A multiscale method applied to shallow water flow** **256**  
*Anna Martínez Gavara, Rosa Donat, Guillaume Chiavassa*  
*Jueves 27, Hora 12:05, Sala 4*
- Métodos conservativos de direcciones alternadas para problemas parabólicos semilineales sobre mallados rectangulares lógicos** **257**  
*Andrés Arrarás Ventura, Laura Portero Egea, Juan Carlos Jorge Ulecia*  
*Jueves 27, Hora 12:25, Sala 4*
- Métodos multimalla en problemas lineales de flujo óptico** **258**  
*Gabriel Asensio Madrid, Pedro M. González, Carlos Platero, José Manuel Poncela Pardo, Javier Sanguino Botella, María Carmen Tobar*  
*Jueves 27, Hora 12:45, Sala 4*
- Existencia de solución para un modelo termoeléctrico con conductividad térmica una función de Caratheodory** **259**  
*Francisco José Pena Brague, Alfredo Bermúdez de Castro, Rafael Muñoz Sola*  
*Jueves 27, Hora 13:05, Sala 4*
- Finite difference approximation for secondary consolidation problems and its numerical resolution by multigrid** **260**  
*Francisco Gaspar, José Luis Gracia, Francisco Lisbona, C.W. Oosterlee*  
*Jueves 27, Hora 13:25, Sala 4*

COMUNICACIONES. JUEVES 27 (MAÑANA) SALA 5.  
*Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*

- A mixed finite element method for the coupling of fluid flow with porous media flow** **261**  
*Salim Meddahi Bouras, Gabriel N. Gatica, Ricardo Oyarzúa*  
*Jueves 27, Hora 11:05, Sala 5*
- Condiciones de frontera absorbentes para la ecuación de Schrödinger no lineal discretizada con elementos finitos** **262**  
*Nuria Reguera López, Isaías Alonso Mallo*  
*Jueves 27, Hora 11:25, Sala 5*
- Un modelo unidimensional de flujo sanguíneo obtenido mediante el método de desarrollos asintóticos** **263**  
*José Manuel Rodríguez Seijo, María Victoria Otero Piñeiro*  
*Jueves 27, Hora 11:45, Sala 5*
- Métodos de elementos finitos y características para la simulación de la convección natural** **264**  
*Marta Benítez García, Alfredo Bermúdez de Castro*  
*Jueves 27, Hora 12:05, Sala 5*
- Regularidad anisótropa de un problema de Ecuaciones Primitivas** **265**  
*María Angeles Rodríguez Bellido, Didier Bresch, Francisco Guillén González*  
*Jueves 27, Hora 12:25, Sala 5*
- Modelado multiescala de flujos viscoelásticos: una nueva aproximación a CONNFESSIT** **266**  
*Juan Luis Prieto Ortíz, Rodolfo Bermejo Bermejo, Manuel Laso Carbajo*  
*Jueves 27, Hora 12:45, Sala 5*
- Análisis de un método BEM-FEM para la resolución numérica de un problema de magnetostática en  $R^3$**  **267**  
*Virginia Selgas Buznego, Alfredo Bermúdez de Castro, Rodolfo Rodríguez, Pilar Salgado*  
*Jueves 27, Hora 13:05, Sala 5*
- NURBS-Enhanced FEM para problemas de scattering** **268**  
*Rubén Sevilla, Sonia Fernández Méndez, Antonio Huerta*  
*Jueves 27, Hora 13:25, Sala 5*

COMUNICACIONES. VIERNES 28 (MAÑANA) SALA 1.  
*Análisis Teórico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*

- Sobre la existencia de atractores para ecuaciones aleatorias de reacción-difusión con retardos** 271  
*María José Garrido Atienza, Tomás Caraballo Garrido, Björn Schmalfuss, José Valero*  
*Viernes 28, Hora 11:05, Sala 1*
- On a free boundary morpho-dynamic problem in landscape evolution** 272  
*Emanuele Schiavi, Ana Isabel Muñoz Montalvo, Jesús Ildefonso Díaz, A.C. Fowler*  
*Viernes 28, Hora 11:25, Sala 1*
- Convergencia al equilibrio en un modelo simplificado de angiogenesis** 273  
*Cristian Morales Rodrigo*  
*Viernes 28, Hora 11:45, Sala 1*
- Estudio teórico de un modelo simplificado sobre angiogénesis** 274  
*Antonio Suárez Fernández, Manuel Delgado Delgado*  
*Viernes 28, Hora 12:05, Sala 1*
- Sobre un resultado de no existencia de soluciones positivas para un problema elíptico en el semi espacio** 275  
*Sebastián Lorca*  
*Viernes 28, Hora 12:25, Sala 1*
- Análisis mediante simetrías de una familia de ecuaciones de lubricación** 277  
*María Luz Gandarias*  
*Viernes 28, Hora 12:45, Sala 1*

COMUNICACIONES. VIERNES 28 (MAÑANA) SALA 2.  
*Análisis Numérico Matricial*

- Números de condición estructurados para autovalores múltiples** 278  
*Julio Moro, María José Peláez, Daniel Kressner*  
*Viernes 28, Hora 11:05, Sala 2*
- Índice de alcanzabilidad: sistemas 2D positivos con 2 ciclos** 279  
*Esteban Bailo Ballarín, José Gelonch, Sergio Romero*  
*Viernes 28, Hora 11:25, Sala 2*

- On the intersection of the classes of doubly diagonally dominant matrices and S-strictly diagonally dominant matrices** 280  
*Francisco Pedroche Sánchez, Rafael Bru García, Ljiljana Cvetkovic, Vladimir Kostic*  
*Viernes 28, Hora 11:45, Sala 2*
- Cálculo de autovectores con alta precisión relativa con el algoritmo SSVD para matrices simétricas** 281  
*Juan Manuel Molera Molera, Froilán Martínez Dopico*  
*Viernes 28, Hora 12:05, Sala 2*
- Realizaciones positivas de determinados sistemas singulares** 282  
*Rafael Cantó Colomina, Beatriz Ricarte, Ana María Urbano Salvador*  
*Viernes 28, Hora 12:25, Sala 2*
- Submatriz sudeste más próxima que hace múltiple un valor propio prescrito** 283  
*Francisco E. Velasco Angulo, Juan Miguel Gracia*  
*Viernes 28, Hora 12:45, Sala 2*
- Matrices con inversa positiva** 284  
*Manuel Francisco Abad Rodríguez, Juan R. Torregrosa Sánchez*  
*Viernes 28, Hora 13:05, Sala 2*

COMUNICACIONES. VIERNES 28 (MAÑANA) SALA 3.  
*Otros*

- Una caracterización para la alcanzabilidad de sistemas periódicos generalizados con retardos de estados** 285  
*Begoña Cantó Colomina, Carmen Coll, Elena Sánchez*  
*Viernes 28, Hora 12:05, Sala 3*
- Un esquema de cuarto orden con casi-óptimo gasto computacional para ecuaciones no lineales** 286  
*M. Concepción Bermúdez Edo, Sergio Amat Plata, Sonia Busquier, Sergio Plaza*  
*Viernes 28, Hora 12:25, Sala 3*
- OctMesh: un entorno de elementos finitos en Octave** 287  
*J. Rafael Rodríguez Galván*  
*Viernes 28, Hora 12:45, Sala 3*
- Operadores de reconstrucción y esquemas de subdivisión asociados** 288  
*Juan Carlos Trillo, Sergio Amat Plata, Rosa Donat*  
*Viernes 28, Hora 13:05, Sala 3*

COMUNICACIONES. VIERNES 28 (MAÑANA) SALA 4.  
*Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*

- Reproductive and time periodic solutions for incompressible fluids** 289  
*Blanca Climent Ezquerro, Francisco Guillén González, Marko A. Rojas Medar*  
*Viernes 28, Hora 11:05, Sala 4*
- The numerical analysis of higher-order nonlinear FE method for advection dominated problems** 290  
*Sandra M.C. Malta, Regina C.C. de Almeida*  
*Viernes 28, Hora 11:25, Sala 4*
- Esquemas numéricos bidimensionales de alto orden para el acoplamiento de ecuaciones de transporte y ecuaciones de aguas someras** 291  
*José Antonio García Rodríguez, Manuel J. Castro Díaz, Carlos Parés Madroñal, Enrique D. Fernández Nieto, Ana María Ferreiro Ferreiro*  
*Viernes 28, Hora 11:45, Sala 4*
- Deducción y simulación numérica de un nuevo modelo de avalanchas submarinas** 292  
*Enrique D. Fernández Nieto, F. Bouchut, Didier Bresch, Manuel Jesús Castro Díaz, A. Mangeney*  
*Viernes 28, Hora 12:05, Sala 4*
- Esquemas 2D de alto orden basados en reconstrucciones de estado, para sistemas hiperbólicos no conservativos. Aplicación a problemas de transporte de sedimentos** 293  
*Ana María Ferreiro Ferreiro, Manuel Jesús Castro Díaz, Enrique D. Fernández Nieto*  
*Viernes 28, Hora 12:25, Sala 4*
- Homogeneización de problemas (elasto)hidrodinámicos en lubricación** 294  
*Carlos Vázquez Cendón, Guy Bayada, Sébastien Martin*  
*Viernes 28, Hora 12:45, Sala 4*
- On the Locally Discontinuous Galerkin Method for problems with Signorini-type conditions** 295  
*Rommel Bustinza, Francisco Javier Sayas*  
*Viernes 28, Hora 13:05, Sala 4*

COMUNICACIONES. VIERNES 28 (MAÑANA) SALA 5.  
*Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales*

<b>Filtros adaptativos para el tratamiento de la oclusión en el seguimiento de objetos</b>	<b>296</b>
<i>Eduardo Parrilla Bernabé, Damián Ginestar, José Luis Hueso, Jaime Riera, Juan Ramón Torregrosa Sánchez</i>	
<i>Viernes 28, Hora 11:05, Sala 5</i>	
<b>Análisis numérico de un problema de contacto viscoelástico en piezoelectricidad</b>	<b>297</b>
<i>José Ramón Fernández García, Mikael Barbotou, Youssef Ouafik</i>	
<i>Viernes 28, Hora 11:25, Sala 5</i>	
<b>Tratamiento asintótico de las condiciones de contorno para problemas de convección dominante</b>	<b>298</b>
<i>Isabel Sánchez Muñoz, Tomás Chacón Rebollo, Macarena Gómez Mármol</i>	
<i>Viernes 28, Hora 11:45, Sala 5</i>	
<b>Esquemas centrados de cuarto orden no oscilatorios para leyes de conservación hiperbólicas</b>	<b>299</b>
<i>Ángel Balaguer Beser</i>	
<i>Viernes 28, Hora 12:05, Sala 5</i>	
<b>Análisis numérico de un modelo de remodelación ósea</b>	<b>300</b>
<i>Rebeca Martínez Fernández, José Ramón Fernández García, Juan Manuel Viaño</i>	
<i>Viernes 28, Hora 12:25, Sala 5</i>	
<b>Resolución numérica de problemas evolutivos semilineales sobre dominios irregulares mediante métodos miméticos paralelizables</b>	<b>301</b>
<i>Laura Portero Egea, Andrés Arrarás Ventura, Juan Carlos Jorge Ulecia</i>	
<i>Viernes 28, Hora 12:45, Sala 5</i>	
<b>Fifth order accurate numerical approximation of Hamilton-Jacobi equations</b>	<b>302</b>
<i>Susana Serna</i>	
<i>Viernes 28, Hora 13:05, Sala 5</i>	
<b>Lista de personas inscritas</b>	<b>303</b>
<b>Índice Alfabético de Autores</b>	<b>313</b>





# CONFERENCIAS PLENARIAS



## **Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems. Application to shallow water models.**

CARLOS PARÉS

Dpto. Análisis Matemático, Univ. de Málaga

pares@anamat.cie.uma.es

### **Resumen**

Many geophysical flows can be modeled by variants of the shallow water equations. In their simplest form, these equations model the flow of a thin layer of homogeneous fluid that evolves in a region whose boundaries (the bottom and shoreline) are explicitly known. Due to the homogeneity assumption, stratified fluids, which appear frequently in geophysical applications (as in estuarine systems, marine density flows, etc.) cannot be simulated by means of standard shallow water models. Nevertheless, an alternative to costly 3D free-surface models is given by multilayer shallow water models, in which two or more superposed layers of shallow water with different densities are considered. Extensions of single or multilayer shallow water systems are also useful to model sedimentary flows, hyperpycnal plumes, floods, tsunamis, avalanches, river mouths and junctions, estuarine circulation, marine flows through straits and passages, etc.

In most cases, these models can be written as first order nonconservative hyperbolic systems. The numerical approximation of the solutions of this kind of systems present some important difficulties. In this talk, the recent advances of a project whose goal is to develop Finite Volume numerical schemes that handle correctly with these difficulties will be presented. Finally, some applications to real flows will be shown.

## $L^2$ formulation of some hyperbolic conservation laws

YANN BRENIER

C.N.R.S., Univ. de Nice, France

Yann.BRENIER@unice.fr

### Resumen

It is customary to address hyperbolic conservation laws (or Hamilton-Jacobi equations) in functional spaces that are neither Hilbertian nor reflexive (typically  $L^1$ ,  $BV$ ,  $C^0$ ,  $Lip$ , etc.). We show that, in some simple but significative cases (multidimensional scalar conservation laws, Chaplygin gas or Born-Infeld electromagnetism in one space variable), a simple  $L^2$  formulation can be introduced, leading to straightforward well posedness and stability results. This approach can be extended to some coupled system like pressureless Euler-Poisson systems. In each case, very accurate numerical schemes can be designed according to the  $L^2$  formulation. Reference: <http://arxiv.org/pdf/math.AP/0609761>.

# **Semiconcave functions and their applications to PDEs and control theory**

PIERMARCO CANNARSA

Dip. di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"

cannarsa@axp.mat.uniroma2.it

## **Resumen**

Semiconcave functions are a natural generalization of concave functions that retains most of the good properties known in convex analysis, but arises in a wider range of applications. The talk will describe some of the main properties of these functions, focussing on the structure of their singular sets. Applications to the calculus of variations and optimal control, as well as to Hamilton-Jacobi equation, will be given.

## Piecewise linear system dynamics

EMILIO FREIRE

Dpto. de Matemática Aplicada II, Univ. de Sevilla

emilio@matinc.us.es

### Resumen

In this talk we will deal with autonomous and piecewise linear continuous vector fields whose state space is splitted in two or three zones by means of hyperplanes, in such a way that the vector field defines a linear system inside each zone. Our first objective is to illustrate how the study of these systems is interesting by itself, and not only because they are very common mathematical models in applications, since they possess the capability of showing much of the dynamical complexity richness to be expected in nonlinear dynamics. For these reasons, they play a relevant role in the recent history of dynamical systems in general.

A second part of the talk will be devoted to show that piecewise linear systems are ideal as pedagogical examples to understand nonlinear dynamical behavior with relatively simple arguments (e.g. the existence of isolated periodic oscillations or limit cycles).

To finish the presentation, we will highlight some characteristic properties of piecewise linear systems in the framework of control theory regarding concepts as feedback, controllability and observability. These characteristics provide an interesting insight related in some sense with the internal structure of the system.

# Hybrid Monte Carlo methods for fluid and plasma dynamics

RUSSEL CAFLISCH

Mathematics, UCLA, Los Angeles, CA 90095-1555

caflisch@math.ucla.edu

## Resumen

For small Knudsen number, simulation of rarefied gas dynamics by the Direct Simulation Monte Carlo (DSMC) method becomes computationally intractable because of the large collision rate. To overcome this problem we have developed a hybrid simulation method, combining DSMC and a fluid dynamic description into a single seamless method. The molecular distribution function  $f$  is represented as a linear combination of a Maxwellian distribution  $M$  and a particle distribution  $g$ ; i.e.,  $f = bM + (1 - b)g$ . The density, velocity and temperature of  $M$  are governed by fluid-like equations, while the particle distribution  $g$  is simulated by DSMC. In addition there are interaction terms between  $M$  and  $g$ . The coefficient  $b$  is determined automatically, by a thermalization approximation. Numerical results will be presented to demonstrate the validity of this method, as well as the acceleration that it provides over DSMC. This method has been extended to simulation of Coulomb collisions in a plasma. For this extension, the underlying Monte Carlo method is Nanbu's method for Coulomb collisions.

# Self-propelled motions of solids in a fluid: mathematical analysis and control problems

MARIUS TUCSNAK

Institut Elie Cartan de Nancy and INRIA Lorraine

Marius.Tucsna@antares.iecn.u-nancy.fr

## Resumen

The aim of this presentation is to highlight some recent advances on the mathematical analysis and the control of self-propelled motions of solids in a fluid. We study a model consisting in a solid undergoing an undulatory deformation, which is immersed in a viscous incompressible fluid. The motion of the fluid is governed by the incompressible Navier-Stokes equations and the standard conservation's laws of linear and angular momentum rule the dynamics of the structure. The time variation of the fluid domain (due to the motion of the structure) is not known a priori, so we deal with a free boundary value problem. The displacement of the solid is decomposed into a rigid part and a deformation (undulatory) part. The rigid part of the displacement results from the interaction of the fluid and the solid, whereas the deformation part is given. Since our aim is to possibly consider several immersed solids, the domain filled by the fluid is one of the unknowns. Therefore we have to tackle a *free boundary value problem*. The solutions are controlled by an input which is the shape of the solid.

We first show that the initial and boundary value problem obtained by coupling the Navier-Stokes equations for the fluid to Newton's law for the creature is well-posed in Sobolev type spaces. We next give an approximation scheme for the governing equations which is tested on some undulatory motions observed by the zoologists in order to get straight-line-swimming or turning. We finally tackle, from a control theoretic perspective the swimming of aquatic microorganisms. Since, the Reynolds number is this time very low, we consider a model based on the Stokes equations for the fluid.

This presentation is essentially based on results from [1] and [2].

## Referencias

- [1] J. A. San Martín, J.-F. Scheid, T. Takahashi, M. Tucsnak, *An Initial and Boundary Value Problem Modeling Fish-like Swimming*, to appear in Archive for Rational Mechanics and Analysis.
- [2] J. S. Martin, J.-F. Scheid, T. Takahashi, M. Tucsnak, *A control theoretic approach to the swimming of microscopic organisms*, to appear in Quarterly of Applied Mathematics.



# How to approximate the heat equation with Neumann boundary conditions by nonlocal diffusion problems

JULIO D. ROSSI

Departamento de Matemática, FCEyN UBA (1428) Buenos Aires, Argentina

jrossi@dm.uba.ar

## Resumen

The purpose of this talk is to show that the solutions of the usual Neumann boundary value problem for the heat equation can be approximated by solutions of a sequence of nonlocal “Neumann” boundary value problems.

Let  $J : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  be a nonnegative, radial, continuous function with  $\int_{\mathbf{R}^N} J(z) dz = 1$ . Assume also that  $J$  is strictly positive in  $B(0, d)$  and vanishes in  $\mathbf{R}^N \setminus B(0, d)$ . Nonlocal evolution equations of the form  $u_t(x, t) = (J * u - u)(x, t) = \int_{\mathbf{R}^N} J(x - y)u(y, t) dy - u(x, t)$ , and variations of it, have been recently widely used to model diffusion processes, see [1], [2], [5].

In this talk, following [3] and [4], we propose a nonlocal “Neumann” boundary value problem, namely

$$u_t(x, t) = \int_{\Omega} J(x - y)(u(y, t) - u(x, t)) dy + \int_{\mathbf{R}^N \setminus \Omega} G(x, x - y)g(y, t) dy,$$

where  $G(x, \xi)$  is smooth and compactly supported in  $\xi$  uniformly in  $x$ .

Now, for given  $J$  and  $G$  we consider the rescaled kernels

$$J_\varepsilon(\xi) = C_1 \frac{1}{\varepsilon^N} J\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right), \quad G_\varepsilon(x, \xi) = C_1 \frac{1}{\varepsilon^N} G\left(x, \frac{\xi}{\varepsilon}\right)$$

and then the solution  $u^\varepsilon(x, t)$  to

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon(x, t) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} J_\varepsilon(x - y)(u^\varepsilon(y, t) - u^\varepsilon(x, t)) dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbf{R}^N \setminus \Omega} G_\varepsilon(x, x - y)g(y, t) dy, \\ u^\varepsilon(x, 0) &= u_0(x). \end{cases}$$

We show that

$$u^\varepsilon \rightarrow u,$$

in different topologies according to different choices of the kernel  $G$ . Here  $u$  is the solution of the heat equation,  $u_t = \Delta u$  with boundary condition  $\partial u / \partial \eta = g$  and initial condition  $u_0$ .

This is a joint work with C. Cortazar, M. Elgueta and N. Wolanski.

## Referencias

- [1] P. Bates, P. Fife, X. Ren and X. Wang. *Travelling waves in a convolution model for phase transitions*. Arch. Rat. Mech. Anal., 138, 105-136, (1997).
- [2] C. Carrillo and P. Fife. *Spatial effects in discrete generation population models*. J. Math. Biol. 50(2), 161-188, (2005).
- [3] C. Cortazar, M. Elgueta, J. D. Rossi and N. Wolanski. *Boundary fluxes for non-local diffusion*. To appear in J. Differential Equations.
- [4] C. Cortazar, M. Elgueta, J. D. Rossi and N. Wolanski. *How to approximate the heat equation with Neumann boundary conditions by nonlocal diffusion problems*. To appear in Arch. Rat. Mech. Anal.
- [5] P. Fife. *Some nonclassical trends in parabolic and parabolic-like evolutions*. Trends in nonlinear analysis, 153-191, Springer, Berlin, 2003.

# Neurodynamical Mechanisms Underlying Decision-Making: The Role of Statistical Fluctuations

GUSTAVO DECO

ICREA y Univ. Pompeu Fabra

Gustavo.Deco@upf.edu

## Resumen

Decision-making has become the paradigm of choice for many neuroscientists aiming to understand the neural basis of intelligent behavior, seen as the link between perception and action. Behavioral, neurophysiological, and theoretical studies are converging to a common theory that assumes an underlying diffusion process which integrates both the accumulation of perceptual and cognitive evidence for making the decision and motor choice in one unifying neural network. Biologically realistic neural circuits have been designed in computational and theoretical neuroscience to implement stochastic noise driven decision-making. Such models generally involve two populations of excitatory neurons engaged in competitive interactions mediated by inhibition. Sensory input may bias the competition in favor of one of the populations, potentially resulting in a gradually developing decision in which neurons in the chosen population exhibit increased activity while activity in the other population is inhibited. In this scenario both the spontaneous state, in which both populations of excitatory neurons exhibit low-level activity, and the decision-state are stable for the same set of parameter values, i.e. they are bistable. Decision-making is then understood as the fluctuation-driven, probabilistic transition from the spontaneous to the decision state. In this talk, we will analyse and discuss the role of statistical fluctuations due to finite size noise in the decision-making process.

## On the limit cycles of the Lienard differential systems

JAUME LLIBRE

Dpto. de Matemáticas, Univ. Autónoma de Barcelona

jllibre@mat.uab.cat

### Resumen

One of the main interesting problems in the qualitative theory of planar differential equations is the classical problem of studying their limit cycles. When the differential equations are polynomial this is the well known 16th Hilbert's problem.

A particular case of the 16th Hilbert's problem is the study of the limit cycles of the Lienard systems of the form  $x' = y - F(x)$ ,  $y' = -x$ , where  $F(x)$  is a polynomial. For these systems there exists the conjecture of Lins, de Melo and Pugh about their number of limit cycles, revisited by Smale later on. We will talk about this problem, and present old and new results on it.

## Quasi-static evolution problems in plasticity with softening

GIANNI DAL MASO

SISSA, Trieste, Italy

dalmaso@sissa.it

### Resumen

In plasticity theory the term softening refers to the reduction of the yield stress as plastic deformation proceeds. We deal with this problem in the quasi-static case, in the framework of small strain associative elasto-plasticity. The presence of a nonconvex term due to the softening phenomenon requires the extension of a variational framework proposed by Mielke to the case of a nonconvex energy functional. In this problem the use of global minimizers in the corresponding incremental problems is not justified from the mechanical point of view. We analyze a different selection criterion for the solutions of the quasi-static evolution problem, based on a viscous approximation. In view of the nonconvexity of the problem, taking the limit as the artificial viscosity parameter tends to zero leads to a weak formulation of the problem in a space of Young measures. Moreover, since the growth exponent of the energy is one, we need a suitable notion of generalized Young measure in order to deal with concentration effects. Finally, the classical notion of total variation of a time-dependent function on a time interval has to be extended to time-dependent families of Young measures. This enables us to define, in this generalized context, a notion of dissipation, which plays a crucial role in Mielke's variational approach. Some examples show that smooth initial data may lead, after a critical time, to a Young measure solution with concentration phenomena. These results have been obtained in collaboration with Antonio DeSimone, Maria Giovanna Mora and Massimiliano Morini.

## **Time parallel methods: Is it possible to predict the far future, before the near future is known accurately ?**

MARTIN J. GANDER

Univ. of Geneva

gander@math.unige.ch

### **Resumen**

Time dependent problems are often solved using time marching schemes, which means that the solution is sequentially computed time step after time step. Such schemes can remain effective on parallel computers, as long as each time step is costly enough. If not, parallelism in time could alleviate the situation, but is it possible to do useful computations in the far future before the near future results are known ?

I first present a historical overview of algorithms that were proposed over the last 40 years to obtain a certain amount of time parallelism. I will then introduce a general time domain decomposition method based on multiple shooting, which permits the parallel in time computation of solutions of time dependent problems. This time domain decomposition method contains more recent time parallel algorithms like the parareal algorithm. A convergence analysis reveals super-linear convergence of the method on bounded time intervals, and linear convergence on unbounded time intervals under certain conditions. I will illustrate the results with numerical experiments.



## SESIÓN MONOGRÁFICA

### Dynamics and bifurcation in piecewise smooth systems

Organiza:

*E. Ponce (Universidad de Sevilla, España)*

*Lunes 24, Hora 15:45, Sala 4*





## Smooth and non-smooth bifurcation curves in power electronic converters

TERE M-SEARA

Dpto. Matemática Aplicada I, Univ. Politècnica de Catalunya

Tere.M-Seara@upc.edu

### Resumen

In this talk we present an analytical study of some bifurcations in power electronic converters controlled by the so called ZAD (zero-average dynamics) strategy. The ZAD strategy sets the duty cycle,  $d$  (the length of time the input voltage is applied across an inductance), by ensuring that, on average, a function of the state variables is always zero. The two control parameters are a reference voltage that the circuit is required to follow, and a time constant which controls the approach to the zero average.

We prove a general result about non autonomous periodic linear non-smooth systems that allows us to compute analytically the steady state of the problem and some of its bifurcations.

We calculate curves in parameter space at which this  $T$ -periodic solution undergoes a period doubling and a corner collision bifurcations, the latter occurring when the duty cycle saturates and is unable to switch. We also show the presence of a codimension two bifurcation in this system when a corner collision bifurcation and a saddle node bifurcation collide, to produce stable unsaturated  $2T$ -periodic solutions which can be obtained either in the presence or absence of the stable  $T$ -periodic one.

(In collaboration with E. Fossas and S. J. Hogan.)

## Complementarity systems: an introduction

ENRIC FOSSAS

Dpto. Matemática Aplicada I, Univ. Politècnica de Catalunya

enric.fossas@upc.edu

### Resumen

In this talk we study some characteristics of the dynamical behavior of switched power converters in the framework of linear complementarity systems (LCS). LCS are obtained as follows. Take a standard linear system, select a number of input/output pairs  $(u_i, y_i)$  and impose for each of these pairs that at each time  $t$  both  $u_i(t)$  and  $y_i(t)$  must be nonnegative, and at least one of them should be zero (positiveness + orthogonality). These are called the “complementarity conditions” (CC) and the pairs  $(u_i, y_i)$  are called “complementarity variables”. These CC are well-known in mathematical programming, although not usually in combination with differential equations. In the context of electrical circuits, imposing complementarity conditions simply means that some ports are terminated by ideal diodes, with the current  $i_D$  and (minus) the voltage  $-v_D$  as complementarity variables. Associated to each complementarity pair  $(u_i, y_i)$  there are two general situations allowed by the CC: either  $u_i = 0$  and  $y_i > 0$  or  $u_i > 0$  and  $y_i = 0$ . In electrical engineering terminology, diodes may be blocking or conducting. If there are  $p$  diodes, one has  $2p$  of these binary choices and the system can be in any of  $2p$  so-called “modes”. For power converters one has, in addition to (ideal) diodes, some (ideal) switches which are arbitrarily closed or open by a control law. Ideal switches do not dissipate or store power, and hence the product of current and voltage for any of them is zero,  $i_S v_S = 0$ . This resembles part of a CC; however one does not have, in general, a positiveness condition in this case (although some physical realizations of the switch may impose some kind of partial positiveness). The talk is devoted to an introduction to the theory of Complementarity Dynamical Systems. Basic results will be reviewed and applied to examples coming from electrical engineering.

(In collaboration with C. Batlle.)

## Bifurcación silla-nodo de conos invariantes vía bifurcación foco-centro-ciclo límite

VICTORIANO CARMONA

Dpto. Matemática Aplicada II, Univ. de Sevilla

vcarmona@us.es

### Resumen

Los sistemas lineales a trozos se utilizan en diferentes disciplinas científicas para modelar una amplia gama de procesos y dispositivos. Dentro de estos sistemas, tienen especial relevancia los sistemas continuos que muestran dos zonas de linealidad y el origen se encuentra en la frontera que separa dichas zonas. Una primera tarea en el estudio de estos sistemas es la determinación del tipo topológico y estabilidad del origen. La estabilidad del origen suele garantizarse determinando funciones de Liapunov, generalmente cuadráticas. La búsqueda de funciones de Liapunov no es una tarea sencilla y además, es bien sabido que la existencia de una función cuadrática de Liapunov no es una condición necesaria de estabilidad. Por lo tanto, resulta necesario el empleo de otras técnicas para garantizar la estabilidad del equilibrio.

Mientras en el caso bidimensional la estabilidad del origen está perfectamente establecida, cuando el sistema no es plano el estudio de la estabilidad del origen no es un problema trivial. Para sistemas en dimensión tres la estabilidad del origen está íntimamente relacionada con la presencia de conos invariantes en el sistema. De hecho, la ausencia de estas superficies invariantes garantiza la estabilidad del origen cuando los autovalores reales de las matrices del sistema tienen parte real negativa. Por el contrario, la presencia de al menos un cono invariante complica fuertemente el estudio de la estabilidad, pues, incluso cuando las dos matrices del sistema son Hurwitz (sus autovalores están en el semiplano izquierdo), el origen puede ser, tal y como se ha demostrado recientemente, inestable.

Por consiguiente, resulta sumamente interesante estudiar la existencia de conos invariantes en el sistema para poder establecer conjuntos abiertos en el espacio de parámetros que garanticen la estabilidad del origen. En resultados previos se demostraba que a lo sumo pueden aparecer dos conos invariantes aislados, y se conjeturaba la existencia de una bifurcación silla-nodo de los mismos.

En esta charla mostraremos que los conos invariantes en el sistema tridimensional se relacionan de forma biunívoca con las órbitas periódicas de ciertos sistemas planos cuadráticos a trozos con dos zonas. Es más, un adecuado cambio de variable permitirá describir los sistemas cuadráticos a trozos como sistemas lineales a trozos con dos zonas no homogéneos y discontinuos. Esta relación entre conos invariantes y órbitas periódicas nos permitirá, entre otros resultados, probar la existencia de la bifurcación silla-nodo conjeturada, obteniendo la expresión analítica que deben satisfacer los parámetros del sistema en esta bifurcación.

(En colaboración con E. Freire, E. Ponce, J. Ros y F. Torres.)



## SESIÓN MONOGRÁFICA

### Approximation theory and special functions with applications

Organiza:

*R. Álvarez-Nodarse (Universidad de Sevilla, España)*

*Lunes 24, Hora 15:45, Sala 5*



# Asymptotic methods for convolution integrals unified and demystified

JOSÉ LUIS LÓPEZ

Dpto. Matemática e Informática, Univ. Pública de Navarra, Pamplona

jl.lopez@unavarra.es

## Resumen

We present a new method for deriving asymptotic expansions of  $\int_0^\infty f(t)h(xt)dt$  for small  $x$ . We only require for  $f(t)$  and  $h(t)$  to have asymptotic expansions at  $t = \infty$  and  $t = 0$  respectively. Remarkably, it is a very general technique that unifies a certain set of asymptotic methods. Watson's Lemma and other classical methods, Mellin transform techniques, McClure and Wong's distributional approach and the method of analytic continuation turn out to be simple corollaries of this method. In addition, the most amazing thing about it is that its mathematics are absolutely elemental and do not involve complicated analytical tools as the aforesaid methods do: it consists of simple "sums and subtractions". Many known and unknown asymptotic expansions of important integral transforms are trivially derived from the approach presented here.

## Rational spectral transformations and orthogonal polynomials

FRANCISCO MARCELLÁN

Dpto. Matemáticas, Univ. Carlos III de Madrid

pacomarc@ing.uc3m.es

### Resumen

$k$ -Toeplitz matrices are tridiagonal matrices of the form  $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n$  (with  $n \geq k$ ) such that  $a_{i+k,j+k} = a_{i,j}$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, n-k$ ), so that they are  $k$ -periodic along the diagonals parallel to the main diagonal. When  $k = 1$  it reduces to a tridiagonal Toeplitz matrix. The interest of the study of  $k$ -Toeplitz matrices appears to be very important not only from a theoretical point of view (in linear algebra or numerical analysis, e.g.), but also in applications. Here in this talk, motivated by certain physical systems (namely a system of quantum oscillators with a nonlinear interactions) we will discuss spectral properties of some tridiagonal quasi-periodic as well as certain perturbations of them.



## Transformadas de Dunkl y teoremas de muestreo

JUAN LUIS VARONA

Dpto. Matemáticas y Computación, Univ. de La Rioja, Logroño

jvarona@unirioja.es

### Resumen

Sea  $\alpha \geq -1/2$  (aunque muchas cosas se pueden extender hasta  $\alpha > -1$ ). Para funciones adecuadas, la transformada de Dunkl sobre la recta real se define como

$$\mathcal{F}_\alpha(f, y) = \int_{\mathbf{R}} E_\alpha(-ixy) f(x) d\mu_\alpha(x), \quad y \in \mathbf{R},$$

donde  $d\mu_\alpha$  es la medida

$$d\mu_\alpha(x) = \frac{1}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} |x|^{2\alpha+1} dx$$

y  $E_\alpha$  denota cierta función que se expresa en términos de las funciones de Bessel. Cuando  $\alpha = -1/2$ ,  $E_{-1/2}(z) = e^z$  y  $\mathcal{F}_{-1/2}$  es la transformada de Fourier.

El primero que usó la transformada que ahora se denomina de Dunkl fue Roosenraad en su tesis doctoral [6], escrita bajo la dirección de Richard Askey, aunque aparentemente pasó desapercibida. Pero, desde que Dunkl [4] la reintrodujo en 1989, muchos investigadores se han ocupado de estudiar sus propiedades, intentado adaptar a un contexto más amplio todo tipo de resultados ya conocidos sobre la transformada de Fourier. Véanse, por ejemplo, los recientes artículos [1, 2, 5, 7, 8, 9].

Aquí, siguiendo [3], presentamos un teorema de muestreo relacionado con la transformada de Dunkl. En el caso  $\alpha = -1/2$ , dicho teorema se reduce al teorema de Whittaker-Shannon-Kotel'nikov clásico.

(En colaboración con Oscar Ciaurri.)

### Referencias

- [1] N. B. Andersen y M. de Jeu, *Elementary proofs of Paley-Wiener theorems for the Dunkl transform on the real line*, Int. Math. Res. Not. **30** (2005), 1817–1831.
- [2] J. J. Betancor, Ó. Ciaurri y J. L. Varona, *The multiplier of the interval  $[-1, 1]$  for the Dunkl transform on the real line*, J. Funct. Anal. **242** (2007), 327–336.
- [3] Ó. Ciaurri y J. L. Varona, *A Whittaker-Shannon-Kotel'nikov sampling theorem related to the Dunkl transform*, Proc. Amer. Math. Soc., por aparecer.
- [4] C. F. Dunkl, *Differential-difference operators associated with reflections groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989), 167–183.
- [5] M. F. E. de Jeu, *The Dunkl transform*, Invent. Math. **113** (1993), 147–162.
- [6] C. T. Roosenraad, “Inequalities with orthogonal polynomials”, Tesis doctoral, University of Wisconsin-Madison, 1969.
- [7] M. Rösler, *An uncertainty principle for the Dunkl transform*, Bull. Austral. Math. Soc. **59** (1999), 353–360.
- [8] F. Soltani, *Littlewood-Paley operators associated with the Dunkl operator on  $\mathbf{R}$* , J. Funct. Anal. **221** (2005), 205–225.
- [9] K. Trimèche, *Paley-Wiener theorems for the Dunkl transform and Dunkl translation operators*, Integral Transforms Spec. Funct. **13** (2002), 17–38.



## SESIÓN MONOGRÁFICA

### Non-autonomous and stochastic dynamical systems

Organiza:

*T. Caraballo (Universidad de Sevilla, España)*

*Martes 25, Hora 15:45, Sala 4*



# Introduction to the theory of non-autonomous and stochastic/random dynamical systems

PETER E. KLOEDEN

Univ. JWG, Frankfurt (Alemania)

kloeden@math.uni-frankfurt.de

## Resumen

The theory of autonomous dynamical systems and their attractors is well established. Essentially, the mechanism driving the dynamics does not change in time, and the dynamics can be described by a group or semi-group of mappings taking the state space into itself and attractors are compact sets which are invariant, i.e. mapped onto themselves, and attract all nearby trajectories. A particular characteristic of autonomous systems is that only the elapsed time since starting is important, not the actual and starting times themselves.

In non-autonomous dynamical systems and random dynamical systems the driving mechanism itself changes in time, which must also be built into the system description. The most obvious way to do this is to describe the dynamics by a two-parameter group of mappings of the state space into itself, with the parameters being the actual time and the starting time. This leads to the “process” formulation of a non-autonomous dynamical systems. It has the main advantage of being intuitively obvious, but a disadvantage is that it gives little insight into the underlying which cause the changes. An alternative formulation uses “skew-product flows”, which consist of an autonomous dynamical system for the driving mechanism or noise and a cocycle mapping for the state space dynamics. A cocycle is a generalization of a semi-group to include information about the actual state of the driving system.

There are parallel theories for deterministic non-autonomous dynamical systems and random dynamical systems, with the essential difference being that topological arguments can be used in the first case while measure theoretic arguments are need in the second. These various formulations will be discussed, compared and illustrated with examples based on differential and difference equations.

## Estado actual y problemas abiertos de la teoría de sistemas dinámicos no autónomos y/o estocásticos

JOSÉ A. LANGA

Dpto. E.D.A.N., Univ. de Sevilla

langa@us.es

### Resumen

Desde hace ya casi dos décadas existe una importante investigación sobre las propiedades cualitativas de ecuaciones diferenciales bajo la presencia de términos no autónomos y estocásticos. Se trata de modelos que, en general, permiten una aproximación a veces muy realista de fenómenos reales que provienen de otras ramas del saber científico. En estas condiciones, los correspondientes sistemas dinámicos gozan de unos grados de libertad tan grandes que el comportamiento asintótico de los mismos es a veces sorprendente y muy alejado de lo conocido en la Teoría Clásica de Sistemas Dinámicos. Sin embargo, los intensos estudios realizados por diversos grupos en distintas partes del mundo, sobre todo en la última década, permiten hoy describir un mapa de la situación en el que algunos de los principales problemas abiertos han quedado resueltos, permitiendo de esta manera que podamos hoy hablar de un cuerpo teórico coherente e independiente en la Teoría de Sistemas Dinámicos.

El objetivo de esta presentación es describir algunos de los resultados principales de esta teoría, indicando su novedad e importancia en relación con resultados anteriores, así como plantear algunos de los problemas abiertos más relevantes que están siendo actualmente analizados.

# Structure and continuity properties of attractors for non-autonomous dynamical systems

JAMES C. ROBINSON

Institute of Mathematics, Univ. de Warwick, Inglaterra

jcr@maths.warwick.ac.uk

## Resumen

Although the theory of attractors for autonomous dynamical systems is well-developed, classically there is only one class of equations for which one has a good understanding of the structure of the attractor, namely gradient systems. In this case the attractor is the union of the unstable manifolds of the equilibria. Such attractors, whatever underlying system gives rise to them, can be shown to change continuously under perturbation, even when the perturbation is non-autonomous.

In addition, we show that the attractor of systems that are small non-autonomous perturbations of gradient systems have the same structure, giving the first class of non-autonomous systems in which we have a good understanding of the structure of the attractor.





## SESIÓN MONOGRÁFICA

### Goal oriented adaptive methods for the numerical solution of PDEs

Organiza:

*R. Bermejo (Universidad Castilla-La Mancha, España)*

*Martes 25, Hora 15:45, Sala 5*



# Coupling multimodeling with local mesh refinement

MALTE BRAACK

Mathematisches Seminar, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel (Alemania)

mabr@numerik.uni-kiel.de

## Resumen

We propose a twofold adaptive method based on a posteriori control of discretization error and modeling error with respect to functional output  $j(u)$ , see [1]. Denoting by  $u$  the continuous solution of a partial differential equation in variational formulation and by  $u_h$  the discrete solution of a discrete equation. The two formulations differ not only by the variational spaces but also with respect to different models entering the partial differential equation. The discrete variational formulation is considered to involve a simpler model. The a posteriori error representation derived in [3] is of the following form:

$$j(u) - j(u_h) \approx \eta_h + \eta_m + R,$$

where the terms  $\eta_h$  and  $\eta_m$  are the error estimators of the discretization error and the modeling error, respectively. The part  $\eta_h$  consists of residuals with respect to the simpler model and involves approximations of the interpolation error of the primal solution  $u$  and the interpolation error of an associated dual solution  $z$ . The modeling error estimator  $\eta_m$  involves the residual with respect to the more accurate model locally. As a consequence, the model changes from cell to cell in the computational domain.

The methodology is applied to combustion problems, where complicated diffusion models (multicomponent diffusion) are known but rarely used in practice, see [2] and [4], due to the high numerical cost. Therefore, we use also a simpler diffusion model (Fick's law) and measure the introduced error. In the adaptive process, we switch dynamically to the more accurate model (equation) and refine the mesh simultaneously.

## Referencias

- [1] R. Becker and R. Rannacher. *An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods*. In A. Iserles, editor, Acta Numerica 2001. Cambridge University Press, 2001.
- [2] M. Braack and A. Ern. *Coupling multimodeling with local mesh refinement for the numerical solution of laminar flames*. Submitted to Combustion Theory and Modeling, 2003.
- [3] M. Braack and A. Ern. *A posteriori control of modeling errors and discretization errors*. Multiscale Model. Simul., 1(2): 221-238, 2003.
- [4] M. Braack and A. Ern. *Adaptive computation of reactive flows with local mesh refinement and model adaptation*. In Feistauer and Klic, editors, ENUMATH Proceedings 2003, Berlin, 2004, p. 159-168, Springer.

# **Adaptive space-time finite element methods for parabolic optimization problems**

BORIS VEXLER

RICAM, Austrian Academy of Sciences (Austria)

boris.vexler@oeaw.ac.at

## **Resumen**

In this talk we discuss a posteriori error estimates for space-time finite element discretization of parabolic optimization problems. The provided error estimates assess the discretization error with respect to a given quantity of interest and separate the influence of different parts of the discretization (time, space and control discretization). This allows to set up an efficient adaptive algorithm which successively improves the accuracy of the computed solution by construction of locally refined meshes for time and space discretizations.

## A time-space adaptive semi-DWR method

JAIME CARPIO

Dpto. Matemática Aplicada, Univ. Politécnica de Madrid

jaime.carpio@upm.es

### Resumen

We present in this talk a time-space adaptive semi-DWR method in the framework of finite elements. We use goal oriented adaptation of a functional  $J(u)$  of the solution to estimate the error based on the Dual Weighted Residual methodology. The main ingredients of our new time-space adaptive method are: (1) Use of both structured and unstructured meshes. (2) Estimation of the local truncation error by solving backward at each time step a dual problem in the subinterval  $[t_{n-1}, t_n]$ ; so that we avoid to solving backward the dual problem in the whole time integration interval  $[0, T]$ . (3) The local error estimators for the goal functional  $J(u)$  yield a very effective adaptive algorithm which allows to having a control on both the size of the time step and the size of the mesh elements.

We shall illustrate the capabilities of our method when it is applied to solve several reaction-diffusion-convection problems as well as the Navier-Stokes equations, in which the convection terms are treated in a semi-Lagrangian manner.



# SESIÓN MONOGRÁFICA

## Mathematics for health sciences

Organizan:

*M. Delgado (Universidad de Sevilla, España)*

*A. Suárez (Universidad de Sevilla, España)*

*Jueves 27, Hora 15:45, Sala 4*





## **La Bioestadística: una disciplina fundamental en investigación biomédica**

CARMEN CADARSO

Dep. Estadística e IO, Univ. de Santiago

enicadar@usc.es

### **Resumen**

La Bioestadística se ha convertido, hoy en día, en una componente científica fundamental de la investigación biomédica y de la Salud Pública. A través de aplicaciones reales, se revisarán diversas metodologías estadísticas, alguna de ellas novedosa, que responden a problemas emergentes de interés en Biomedicina. En particular, se presentarán modelizaciones en el ámbito de la Epidemiología, la Clínica, la Radiología y la Neurociencia.

## **Mathematical models of stroke**

EMMANUEL GRENIER

Ecole Normale Supérieure de Lyon (France)

Emmanuel.GRENIER@umpa.ens-lyon.fr

### **Resumen**

The aim of this talk is to investigate various mathematical models of ischemic brain stroke. We will in particular discuss the general modeling strategy, the importance of stochastic effects, the problem of the validation of submodels and the search for parameters.

## Simulación numérica de diversos problemas relativos al crecimiento de tumores sólidos

MERCEDES MARÍN

Dpto. Informática y Análisis Numérico, Univ. de Córdoba

merche@uco.es

### Resumen

En las últimas tres décadas, se han desarrollado una gran variedad de modelos, descritos por EDP's, para intentar simular el crecimiento de tumores sólidos. Estos modelos están basados en leyes de conservación de la masa y en procesos de reacción difusión dentro del tumor. En principio, según la fase que se quiera estudiar (avascular, angiogénesis, vascular) el modelo será diferente ya que los procesos biológicos que tienen lugar en cada una de ellas y las variables que intervienen son de naturaleza distinta.

Los modelos que simulan la fase avascular vienen descritos por problemas de frontera libre en los que interesa estudiar cómo cambia el tamaño y la forma del tumor con el tiempo. Se busca determinar a la vez dicha frontera y la solución de las ecuaciones diferenciales dentro del dominio acotado por ella.

Quizás, de todas las fases del desarrollo del tumor, la más interesante sea la angiogénesis que es la que da lugar, en respuesta a señales químicas emitidas por el tumor, a la formación de una red de vasos capilares que llegan hasta el mismo, a partir de una vasculatura preexistente. Sin esta red el tumor crecería sólo hasta un cierto límite debido a la falta de oxígeno y de nutrientes. Aquí, el objetivo de estudio es conseguir o bien controlar el crecimiento de la red capilar para que no llegue al tumor (y por tanto se frene su crecimiento), o bien aprovecharla para la administración de medicamentos que incidan sobre el propio tumor.

En la última fase, la vascular, interesa estudiar el proceso de invasión y metástasis del tumor sobre los tejidos circundantes.

Expondremos diferentes modelos que corresponden a cada una de las fases anteriores, su tratamiento numérico y algunos resultados obtenidos, centrándonos sobre todo en la fase angiogénica. Así mismo veremos algunos modelos recientes en los que se intenta simular de forma conjunta las diferentes fases de desarrollo y las posibles terapias a aplicar.



# SESIÓN MONOGRÁFICA

## Convolutional codes

Organiza:

*J.J. Climent (Universidad de Alicante, España)*

*Jueves 27, Hora 15:45, Sala 5*



## Algebraic-Geometric constructions of convolutional codes

JOSÉ M. MUÑOZ PORRAS

Dpto. Matemáticas, Univ. de Salamanca

jmp@usal.es

### Resumen

The techniques proposed by V.D. Goppa for constructing Algebraic-Geometric codes (AG codes) over a finite field  $\mathbf{F}_q$  can be translated to the setting of convolutional codes over the field  $\mathbf{F}_q(\mathbf{z})$  of rational functions in a variable  $z$ . This discover provides a systematic method for obtain convolutional codes with prescribed properties, in particular, that attains the maximum free distance possible.

In this talk we explain the basic constructions of this AG convolutional codes, and propose a way to give a geometric interpretation of the parameters of convolutional codes.

## Use of (generalized) systematic encoders in the analysis of a convolutional code

RAQUEL PINTO

Dep. Mathematics, Univ. de Aveiro (Portugal)

raquel@mat.ua.pt

### Resumen

Every convolutional code admits a systematic encoder. If  $\mathcal{C}$  is a  $[p, m]$ -convolutional code, a systematic encoder is a rational encoder with structure  $[I_m|G(d)]$ , up to a column permutation. Such encoders constitute a standard class for linear block codes. Besides the security they offer by preserving the information sequences in the codewords, they also present the advantage of having trivial right inverses and being simpler to implement. Moreover, the simplicity of the structure of such encoders is very useful in code decomposition. Considering convolutional codes, such encoders are not, in general, polynomials. Forney considers canonical encoders (left prime and row reduced polynomial encoders) as a standard class of encoders of a convolutional code. The main virtue of such encoders is that they constitute a standard basis for the set of all polynomial codewords of a code. However, every convolutional code admits a row reduced polynomial encoder with structure  $[\text{diag}\{q_1(d), q_2(d), \dots, q_m(d)\}|\tilde{G}(d)]$ , up to a column permutation. In this presentation we use such encoders to analyze the properties of a convolutional code, in particular the distance properties of the code.



## Construction of Convolutional Codes with a Designed Parameters from Linear System Viewpoint

CARMEN PEREA

Dpto. Estadística, Matemáticas e Informática, Univ. Miguel Hernández, Elche

perea@umh.es

### Resumen

Coding theory is naturally partitioned into the study of block and convolutional codes. Convolutional codes generalize the class of block codes in a natural way. However, the algebraic theory of convolutional codes is not as advanced as the algebraic theory of block codes. In fact, more of the implemented convolutional codes were found by exhaustive computer searches. Some of the few algebraic constructions have extended construction for block codes to convolutional codes. Another procedures consist to construct new convolutional codes from old ones. Two of these techniques are the coding concatenation, that allow us the use of multiple encoding stages to obtain long codes with only a linear increase in decoding complexity, and the punctured process, thus a low rate encoder can be used to generate many high-rate codes. Both techniques are treated in the literature from the generator matrix viewpoint. In this work, we present new convolutional codes with a fixed rate and degree using the concatenation and punctured techniques from linear system viewpoint. We also establish lower bound over the free distance of the obtained convolutional codes.



## SESIÓN MONOGRÁFICA

### Inverse problems and control theory for PDEs

Organiza:

*O. Kavian (Université de Versailles - Saint Quentin, Francia)*

*Viernes 28, Hora 15:45, Sala 4*



## A 0-Laplacian approach to impedance imaging

YVES CAPDEBOSCQ

Dep. Mathématiques, Univ. Versailles - Saint Quentin (Francia)

yves.capdeboscq@uvsq.fr

### Resumen

Electrical impedance tomography (EIT) technique has been an active research topic since the early 1980s. In EIT, one measures the boundary voltages due to multiple injection currents to reconstruct images of the conductivity distribution. However, these boundary voltages are insensitive to a local change of the conductivity distribution and the relation between them is highly nonlinear.

Medical imaging has been one of the important application areas of EIT. Indeed, biological tissues have different electrical properties that change with cell concentration, cellular structure, and molecular composition. Such changes of electrical properties are the manifestations of structural, functional, metabolic, and pathological conditions of tissues, and thus provide valuable diagnostic information. Since all the present EIT technologies are only practically applicable in feature extraction of anomalies, improving EIT calls for innovative measurement techniques that incorporate structural information.

The core idea of the approach presented in this talk is to extract more information about the conductivity from data that has been enriched by coupling the electric measurements to localized elastic perturbations. More precisely, we propose to perturb the medium during the electric measurements, by focusing ultrasonic waves on regions of small diameter inside the body. Using a simple model for the mechanical effects of the ultrasound waves, we show that the difference between the measurements in the unperturbed and perturbed configurations is asymptotically equal to the pointwise value of the energy density at the center of the perturbed zone. In practice, the ultrasounds impact a spherical or ellipsoidal zone, of a few millimeters in diameter. The perturbation should thus be sensitive to conductivity variations at the millimeter scale, which is the precision required for breast cancer diagnostic.

The material presented in this talk concerning the imaging by perturbation approach, is based on a joint work with Habib Ammari, Eric Bonnetier, Michael Tanter & Matthias Fink and on an ongoing collaboration with Frédéric de Gournay, Otared Kavian and Jérôme Fehrenbach. I will also discuss recent results concerning perturbation of asymptotically small volume fraction which are based on joint works with Michael Vogelius.

# Parameter identification and applications in ultrasonic bio-imaging

JÉRÔME FEHRENBACH

Laboratoire MIP, Univ. Paul Sabatier - Toulouse (Francia)

fehren@mip.ups-tlse.fr

## Resumen

Identification of some parameter of a partial differential equation (boundary conditions and/or coefficients) from the observation of solutions of this equation is a mathematically challenging task. Techniques issued from optimal control of partial differential equations can provide answers. Parameter identification has many interesting applications, we will present examples in ultrasonic bio-imaging.

The first example is the identification of elasto-static parameters of a material. The clinical interest is that tumours are harder than the surrounding safe tissue. We will present the imaging modality, named ultrasonic elastography. Under small displacements, biological tissues are assumed to be linear elastic materials. An observation is the measurement of one component of the displacement under an external loading. From this displacement data, the objective is to retrieve the stiffness of the material (Young's modulus).

The operator to be inverted is compact, therefore the identification of Young's modulus is an ill-posed problem. We propose an identification strategy that consists of minimizing the difference between the observation and the predictions using a Gauss-Newton algorithm. This optimization does not require the full Jacobian (it is expensive to compute and to store). The product of a vector by the Jacobian and by its transpose are obtained by direct and adjoint differentiation [1]. Examples on *in-vitro* data are presented. Poisson's ratio is a parameter describing the compressibility of a linear isotropic elastic medium. The influence of Poisson's ratio on the direct and on the inverse problems are discussed [2].

Ultrasound images can be obtained at a very high frame rate ( $\sim 5000$  Hz) using emerging techniques [3]. This allows to image the shear waves propagating in a biological tissue (shear wave speed:  $5\text{-}50$  m.s $^{-1}$ ). The shear wave speed is related to the shear modulus and provides clinical information. Another information is of clinical interest: the attenuation coefficient. In principle, the shear modulus and the attenuation coefficient could be determined from the measurements. The methods currently in use involve two differentiations of the measurements, or do not take into account the wave equation.

Other criteria can help discriminate between normal and pathological tissues. For instance a non-linear stress-strain relation, and anisotropic elasticity tensors characterize pathological tissues [4]. The mathematicians could help designing methods that estimate quantitatively these two behaviors. This would be interesting both on the mathematical point of view and for the practical applications.

## Referencias

- [1] J.Fehrenbach, M.Masmoudi, R.Souchon, P.Trompette *Detection of small inclusions using elastography*, Inverse Problems, **22** (2006), 1055–1069
- [2] J Fehrenbach, *Influence of Poisson's ratio on elastographic direct and inverse problems*, Phys Med Biol, **52** (2007), 707–716
- [3] M Fink, L Sandrin, M Tanter, S Catheline, S Chaffai, J Bercoff, JK Gennisson *2D transient elastography with an Ultrafast ultrasonic scanner* 1st Intl Conf Ultras. Meas. and Imag Tiss Elast (2002)
- [4] T Krouskop, T Wheeler, F Kallel, *The elastic moduli of breast and prostate tissues under compression*, Ultrason Imaging, **20** (1998) 151–159

## Cloaking: a new phenomena in Electromagnetism and Elasticity

GRAEME MILTON

Dep. of Mathematics, Univ. Utah (EEUU)

milton@math.utah.edu

### Resumen

The making of an object invisible through some cloaking device until recently was commonly regarded as science fiction. Two quite different types of electromagnetic cloaking were proposed in early 2006. In our cloaking scenario a collection of finitely many polarizable dipoles becomes essentially invisible when they are within a certain critical distance of a superlens.

Superlenses have attracted attention because they promise resolution on a length scale finer than can be achieved using conventional lenses, i.e. finer than the wavelength. The radiation scattered by the polarizable dipoles resonates with the superlens and acts back on the dipoles to essentially cancel the field incident on them, which is why they become invisible. Dipolar energy sources supplying constant power also become invisible. A second type of cloaking was proposed by Pendry, Schurig and Smith and Leonhardt. In this scenario a shield cloaks objects to incident electromagnetic waves by guiding the waves around the object.

This work is related to the earlier work of Greenleaf, Lassas and Uhlmann, on cloaking for conductivity. Here we will review these developments and also discuss how cloaking might be extended to elasticity using these ideas. This requires new materials, in particular materials with anisotropic mass density and a constitutive law in which the stress depends on the velocity and the momentum depends on the displacement gradient. We sketch how such materials, with behavior outside that of continuum elastodynamics, might be made. This is joint work with Lindsay Botten, Marc Briane, Ross McPhedran, Nicolae Nicorovici, and John Willis.





## SESIÓN MONOGRÁFICA

### Recent advances in the mathematical and numerical analysis of oceanography

Organizan:

*T. Chacón (Universidad de Sevilla, España)*

*C. Parés (Universidad de Málaga, España)*

*Viernes 28, Hora 15:45, Sala 5*



## Modelización numérica del flujo en aguas poco profundas: Aplicación a rías y estuarios

LUIS CEA

Dpto. Métodos Matemáticos y de Representación, Univ. de La Coruña

lcea@udc.es

### Resumen

Los modelos numéricos son una herramienta ampliamente utilizada en la actualidad para el estudio del flujo en rías y estuarios. Para este tipo de problemas, el coste computacional de un modelo tridimensional es en general excesivo. Por otro lado, los modelos unidimensional, tradicionalmente utilizados en hidráulica fluvial, no son adecuados debido a la compleja geometría de las regiones costeras. Debido a ello, los modelos bidimensionales de aguas poco profundas son habitualmente los más adecuados para el estudio de las corrientes costeras. Debido a la oscilación del nivel de marea, la extensión del flujo no está limitada en espacio, siendo necesario calcular un frente seco-mojado no-estacionario, el cual es parte de la solución del problema considerado. Además, el flujo en regiones costeras es siempre turbulento, por lo que es necesario utilizar un modelo de turbulencia adecuado. En este artículo se presenta un modelo en volúmenes finitos para el cálculo del flujo de marea en regiones costeras, centrándose en su aplicación a rías y estuarios. Se presentan las principales ventajas, inconvenientes y limitaciones del modelo para este tipo de aplicaciones, y se comparan algunos resultados numérico-experimentales.

# Modelado numérico de la capa límite turbulenta en presencia de efectos de flotabilidad

MACARENA GÓMEZ-MÁRMOL

Dpto. E.D.A.N., Univ. de Sevilla

macarena@us.es

## Resumen

En el océano como es bien conocido existen dos capas límites básicas, la superficial producida por la fricción del viento y la profunda producida por la fricción con el fondo. Ahora bien, fenómenos tales como la evaporación, las precipitaciones, el calor solar o los vientos en superficie generan una nueva capa conocida como la capa de mezcla. Esta capa se caracteriza por tener densidad casi-constante y su espesor en general no tiene relación con el de la capa límite superficial. En la capa de mezcla el modelado de la turbulencia se complica adicionalmente, debido a que el fluido no es homogéneo y está estratificado. En concreto, los factores principales que intervienen en el desarrollo de la turbulencia son las fuerzas de flotabilidad y de cizalladura. Como es habitual en el modelado de la turbulencia, para atacar el problema de cierre de las ecuaciones se introduce la viscosidad turbulenta. Esta viscosidad debe recoger los efectos físicos que determinan la turbulencia. Es por esta razón que en este caso, se toma en función del número de Richardson de gradiente. Este número adimensional establece la razón entre las fuerzas desestabilizadoras representadas por la cizalladura y las estabilizadoras representadas por la flotabilidad, y viene expresado por:

$$R_i = \frac{-g}{\rho_0} \frac{\partial_z \rho}{|\partial_z u|^2},$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $u$  la velocidad,  $g$  la gravedad y  $\rho_0$  es la densidad característica del agua. En función de las diferentes parametrizaciones de la viscosidad turbulenta como función del número de Richardson de gradiente se obtienen los distintos modelos de turbulencia. Los más utilizados y contrastados físicamente de este tipo son los de Pacanowski-Philander ([3]) y Large-Gent ([2]). Paradójicamente, encontramos en estos modelos rangos del número de Richardson que corresponden a situaciones físicas reales, para los que el modelo deja de ser válido porque la viscosidad turbulenta se hace negativa. Los modelos de turbulencia así elaborados constituyen sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico, de gran dificultad desde el punto de vista del Análisis Matemático. En nuestro trabajo hacemos un estudio de la existencia de soluciones de equilibrio del modelo, así como su estabilidad lineal. Aplicando este estudio a los modelos antes mencionados probamos que hay situaciones físicamente posibles para las cuales existen varias soluciones de equilibrio, pudiendo ser algunas de ellas inestables matemáticamente. Proponemos una ligera modificación de estos modelos clásicos que conduce a viscosidad turbulenta siempre positiva y unicidad de solución de equilibrio. Sin embargo, sigue existiendo un pequeño rango de valores del número de Richardson para los cuales la solución es inestable matemáticamente. Para validar nuestro modelo hemos realizado varios tests de comparación con los modelos de Pacanowski-Philander y Large-Gent, llegando a resultados similares, ganando además en estabilidad numérica. Por último, hemos realizado test basados en datos experimentales reales en mares tropicales donde los resultados de nuestro modelo mejoran los de los modelos clásicos anteriores.

## Referencias

- [1] A.C. Bennis, T. Chacón Rebollo, M. Gómez Mármol, R. Lewandowski, *Stability of some turbulent vertical models for the ocean mixing boundary layer*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00121202>.
- [2] W. Large, P.Gent, *Validation of vertical mixing in an equatorial ocean model using large eddy simulations and observations*, *Journal of Physical Oceanography*, Volume 29, (1998), 449–464.
- [3] Pacanowski, Philander, *Parameterization of vertical mixing in numerical models of tropical oceans*, *Journal of Physical Oceanography*, Volume 11, (1981), 1443–1451.

## Simulación de corrientes de marea en el Estrecho de Gibraltar mediante modelos bicapa 2D de aguas someras

JOSÉ M. GONZÁLEZ-VIDA

Dpto. Análisis Matemático, Univ. de Málaga

gonzalezvida@anamat.cie.uma.es

### Resumen

En la exposición se presentarán los últimos resultados que el grupo de investigación EDANYA de la Universidad de Málaga está obteniendo con un modelo *shallow-water* bicapa para la simulación del intercambio de masas de agua a través del Estrecho de Gibraltar. El modelo utilizado está basado en un método de volúmenes finitos e incorpora técnicas específicas para abordar distintas dificultades que aparecen: formación y propagación de frentes internos, frentes seco-mojado, inestabilidades de Kelvin-Helmholtz, etc. Con el objeto de poder realizar simulaciones realistas en tiempos razonables, se hace necesario el uso de técnicas de paralelización en la implementación de los algoritmos de resolución numérica. Se mostrarán varios experimentos de simulación en la zona y comparaciones con medidas experimentales.



# SESIÓN MONOGRÁFICA

## Bose-Einstein condensation

Organiza:

*J.J. López-Velázquez (Universidad Complutense de Madrid, España)*

*Viernes 28, Hora 17:15, Sala 4*





## Modelling of rotating Bose-Einstein condensates

XAVIER BLANC

Lab. Jacques-Louis Lions, Univ. Paris 6 (FRANCIA)

blanc@ann.jussieu.fr

### Resumen

We will review the modelling of rotating Bose-Einstein condensates. Starting from quantum N-body, we will explain its link with the celebrated Gross-Pitaevskii energy, and the nucleation of vortices. We will also review some modelling and mathematical issues concerning the fractional quantum Hall effect.

## Open mathematical problems in mean field models for Bose Einstein condensation

VÍCTOR M. PÉREZ GARCÍA

Dpto. Matemáticas, Univ. Castilla - La Mancha

vperez@ind-cr.uclm.es

### Resumen

En esta charla se introducirán las ecuaciones en derivadas parciales que aparecen en el contexto de la modelización de los condensados de Bose-Einstein mediante la teoría de campo medio. Se presentarán los retos teóricos en el campo y un conjunto de problemas matemáticos abiertos relacionados con ecuaciones en derivadas parciales, teoría de control, ecuaciones integro-diferenciales, Análisis de Fourier, etc., todos ellos directamente relacionados con cuestiones de relevancia experimental de gran interés físico.

# The onset of interference effects during the formation of Bose Einstein condensate

JUAN J. LÓPEZ-VELÁZQUEZ

Dpto. Matemática Aplicada, Univ. Complutense, Madrid

jj.velazquez@mat.ucm.es

## Resumen

We present the derivation of the equation of the boundary layer which describes in detail the transition of the distribution function of a gas of weakly interacting bosons to the distribution function of the gas in presence of a Bose Einstein condensate.



# SESIÓN MONOGRÁFICA

## Dynamical systems and celestial mechanics

Organizan:

*A. Elipe (Universidad de Zaragoza, España)*

*J. Palacián (Universidad Pública de Navarra, España)*

*Viernes 28, Hora 17:15, Sala 5*



## **KAM theory in celestial mechanics**

LUIGI CHIERCHIA

Dip. Matematica, Univ. degli Studi Roma Tre (Italia)

luigi@mat.uniroma3.it

### **Resumen**

Even though KAM theory was invented to overcome centennial problems in Celestial Mechanics, it is only quite recently (2004) that there appeared the first complete proofs of general results about the existence of quasi-periodic motions for  $N$  body problems. We shall review the main applications of KAM theory to Celestial Mechanics and discuss a few recent extensions concerning the measure and regularity of quasi-periodic trajectories for the planetary  $N$  body problem.

# Una aproximación geométrica a la estabilidad de sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad

VÍCTOR LANCHARES

Dpto. Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño

vlancha@dmc.unirioja.es

## Resumen

El estudio de la estabilidad de los puntos críticos de un sistema dinámico juega un papel importante en el análisis cualitativo del mismo. Para el caso de un sistema hamiltoniano, la estabilidad depende de las propiedades de la función hamiltoniana  $H$  que define el sistema. En concreto, para que un punto crítico sea estable todos los exponentes característicos de su aproximación lineal deben tener parte real nula, por lo que nos encontramos ante un caso crítico en la terminología de Lyapunov; hay que tener en cuenta los términos no lineales para poder decidir sobre la estabilidad, por lo que el problema resulta complicado.

Los resultados más importantes están basados en la teoría KAM y para sistemas de dos grados de libertad autónomos la cuestión de la estabilidad está casi completamente resuelta. Nosotros nos centraremos en estos sistemas y veremos cómo nos podemos aproximar a los resultados clásicos a partir de consideraciones geométricas y al mismo tiempo ver las dificultades que aparecen cuando estos resultados fallan.



## Celestial mechanics on the microscopic scale

TURGAY UZER

School of Physics, Georgia Tech, Atlanta (EEUU)

turgay.uzer@physics.gatech.edu

### Resumen

Sensitive dependence on initial conditions is a feature of the motion of three or more bodies which interact gravitationally. In the solar system, objects such as asteroids and comets, can follow chaotic trajectories. Intriguingly, the same sort of trajectories are encountered in atomic and molecular systems, particularly for the motion of electrons that have been excited to very high energies. In effect, these so-called Rydberg electrons 'orbit' at large distances from their parent atoms. The mathematics describing the motion of gravitationally interacting bodies in space closely parallels the mathematics describing the motion of electrons. The special case of the celestial restricted three-body problem is mathematically analogous to the situation when a hydrogen atom loses its electron (through ionization) in crossed electric and magnetic fields. After presenting this remarkable analogy, I will explain how this connection is being used for mission design and for understanding the way chemical reactions take place.



# COMUNICACIONES

*Lunes 24*



# Asymptotic behaviour of a singularly perturbed convection-diffusion problem in a rectangle with discontinuous boundary data at the corners

ESTER PÉREZ SINUSÍA, J.L. LÓPEZ GARCÍA

Dpto. de Matemática e Informática, Universidad Pública de Navarra

ester.perez@unavarra.es, jl.lopez@unavarra.es

## Resumen

In former works [1, 2, 3], we have studied the asymptotic behaviour of the solution of several singular perturbation convection-diffusion problems with discontinuous data defined on different unbounded domains (quarter plane, an infinite and a semi-infinite strip, a sector). In this work [4], we analyze a problem of the same type but defined on a bounded domain, more interesting for practical purposes. We consider a singularly perturbed convection-diffusion equation,  $-\varepsilon \Delta u + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u = 0$ , defined in a rectangular domain  $\Omega \equiv \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi a, 0 \leq y \leq \pi\}$ ,  $a > 0$ , with Dirichlet-type boundary conditions discontinuous at two of the corners of the domain  $(0, 0)$  and  $(\pi a, 0)$ :  $u(x, 0) = 1$ ,  $u(x, \pi) = u(0, y) = u(\pi a, y) = 0$ . This problem displays boundary and interior layers. We derive the exact solution of the problem by means of the method of separation of variables. The exact representation can be written in terms of a Fourier series which is transformed into a series of integrals in the complex plane from which we obtain complete asymptotic expansions. We approximate the solution by deriving asymptotic expansions from this series, not only in the singular limit  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  (with fixed distance to the discontinuity points  $(0, 0)$  and  $(\pi a, 0)$ ), but also in the limit  $r \rightarrow 0^+$  (with fixed  $\varepsilon$ ), where  $r$  represents the distance to the points of discontinuity. Then, we approximate the solution on the whole domain, including the neighborhood of the points of discontinuity. It is shown that the first term of the expansion at  $\varepsilon = 0$  contains a linear combination of error functions. This term characterizes the effect of the discontinuities on the  $\varepsilon$ -behaviour of the solution  $u(x, y)$  in the boundary or the internal layers. On the other hand, near the points of discontinuity  $(0, 0)$  and  $(\pi a, 0)$ , the solution  $u(x, y)$  is approximated by a linear function of the polar angle.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] J.L. López y Ester Pérez Sinusía. *Asymptotic expansions for two singularly perturbed convection-diffusion problems with discontinuous data: the quarter plane and the infinite strip*. Stud. Appl. Math, 113 (2004), 57-89.
- [2] J.L. López y Ester Pérez Sinusía. *Analytic Approximations for a singularly perturbed convection-diffusion problem with discontinuous data in a half-infinite strip*. Acta Applicandae Mathematicae, 82 (2004), 101-117.
- [3] J.L. López y Ester Pérez Sinusía. *Asymptotic Approximations for a singularly perturbed convection-diffusion problem with discontinuous data in a sector*. JCAM, 181 (2004), 1-23.
- [4] J.L. López y Ester Pérez Sinusía. *The role of the error function in a singularly perturbed convection-diffusion problem in a rectangle with corner singularities*. The Royal Society of Edinburgh Proceedings A (Mathematics), (2006).

# Aproximación de un modelo de cristales líquidos nemáticos con un esquema completamente discreto y penalizado

F. GUILLÉN-GONZÁLEZ, J. V. GUTIÉRREZ-SANTACREU,  
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla  
guillen@us.es, juanvi@us.es

## Resumen

En esta comunicación presentamos un esquema numérico con elementos finitos continuos en espacio y diferencias finitas en tiempo para aproximar un modelo de cristales líquidos nemáticos por medio de un modelo penalizado. Supongamos  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un dominio acotado y de frontera  $\partial\Omega$  suficientemente regular tal que el problema de Stokes tenga regularidad  $W^{1,\infty} \times L^\infty$  en velocidad y presión. Denotamos  $Q = \Omega \times (0, T)$  y  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ , donde  $[0, T]$  es el intervalo temporal de observación, para  $T > 0$ . Las incógnitas son:  $\mathbf{u}$  el campo de velocidades incompresible,  $p$  la presión del fluido y  $\mathbf{d}$  la orientación de las macromoléculas de cristales líquidos, y verifican el siguiente problema en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} |\mathbf{d}| = 1, \quad \partial_t \mathbf{d} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{d} - \gamma \Delta \mathbf{d} - \gamma |\nabla \mathbf{d}|^2 \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{en } Q, \\ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p + \lambda \nabla \cdot ((\nabla \mathbf{d})^t \nabla \mathbf{d}) &= \mathbf{0} && \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{en } Q, \\ \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{d} &= \mathbf{l} && \text{en } \Sigma, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{d}|_{t=0} &= \mathbf{d}_0 && \text{en } \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $\mathbf{u}_0$  y  $\mathbf{d}_0$  son las condiciones iniciales,  $\mathbf{l}$  es la condición de Dirichlet para el vector de orientación  $\mathbf{d}$  (que hay que suponer independiente del tiempo),  $\nu > 0$  representa la viscosidad del fluido y  $\lambda > 0$  es la constante de elasticidad.  $(\nabla \mathbf{d})^t$  denota la matriz traspuesta de  $\nabla \mathbf{d}$ . Imponiendo que  $|\mathbf{d}_0| = 1$  y  $|\mathbf{l}| = 1$ , se tiene existencia de solución global en tiempo de (1) con la siguiente regularidad:

$$\mathbf{d} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Esta solución se encuentra mediante un proceso asintótico [2], a partir del modelo penalizado, llamado de Ginzburg-Landau, que se obtiene de (1) relajando la restricción  $|\mathbf{d}| = 1$  por  $|\mathbf{d}| \leq 1$ , y en el sistema para  $\mathbf{d}$  cambiando los términos más no lineales  $|\nabla \mathbf{d}|^2 \mathbf{u}$  por el término de penalización  $\mathbf{f}(\mathbf{d}) = \varepsilon^{-2}(|\mathbf{d}|^2 - 1)\mathbf{d}$ , asociado al parámetro  $\varepsilon > 0$ .

Las principales dificultades para diseñar esquemas numéricos estables y convergentes para el modelo penalizado son: aproximar  $\mathbf{d}$  con elemento finitos solo globalmente continuos aunque la regularidad de  $\mathbf{d}$  es  $H^2$  y obtener la restricción  $|\mathbf{d}| \leq 1$  aunque el esquema no verifique puntualmente dicha restricción. En [1] se introduce un esquema (lineal) con una variable auxiliar para aproximar  $-\Delta \mathbf{d}$ , que resulta ser incondicionalmente estable y convergente, obteniéndose además estimaciones de error y convergencia de métodos iterativos para desacoplar el esquema. Ver también los trabajos previos [3, 4] para otros esquemas menos eficientes.

Cuando se trata de construir esquemas numéricos estables y convergentes hacia (1) a través del modelo penalizado, haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  junto con los parámetros discretos en espacio y tiempo  $(h, k)$ , nos encontramos principalmente con las siguientes dificultades: Obtener estimaciones de estabilidad independientes de  $\varepsilon$ , ya que los esquemas anteriores explotan cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Se pierde la estimación  $H^2$  para  $\mathbf{d}$ , que dificulta primero la compacidad  $L^2$  para  $\mathbf{u}$ , que es la clave en el paso al límite en el sistema para  $\mathbf{d}$  y segundo la compacidad  $L^2$  para  $\nabla \mathbf{d}$  fundamental para pasar al límite en el sistema de momentos.

Presentaremos un esquema numérico lineal aunque completamente acoplado, condicionalmente estable bajo una restricción que involucra los tres parámetros  $(h, k, \varepsilon)$  y convergente hacia una solución del problema (1).

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] V. Girault, F. Guillén-González. *Mixed formulation, approximation and decoupling algorithm for a nematic liquid crystals model*. In preparation.
- [2] F. Guillén-González and M.A. Rojas-Medar. *Global solution of nematic crystals models*. C.R.Acad.Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1085-1090.
- [3] C. Liu, N.J. Walkington. *Mixed methods for the approximation of liquid crystal flows*. M2AN Math. Model. Numer. Anal. 36 (2002), no. 2, 205-222.
- [4] C. Liu, N.J. Walkington. *Approximation of liquid crystal flows*. SIAM J. Numer. Anal. 37 (2000), no. 3, 725-741.

# Well-posedness and asymptotic behaviour for the Boussinesq equations in $R^n$ .

VILLAMIZAR-ROA ELDER JESÚS

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Colombia

jvillami@uis.edu.co

FERREIRA C. LUCAS

Dpto. de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

lcff@dmad.ufpe.br

## Resumen

I will talk on my recent work with L.C.F. Ferreira [2], on the well-posedness of the initial value problem for the Boussinesq equations [1], in  $R^n$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u - \nu \Delta u + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \beta \theta f + f_1, & x \in R^n, \quad t > 0, \\ \nabla \cdot u &= 0, & x \in R^n, \quad t > 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \nabla \theta - \chi \Delta \theta &= h, & x \in R^n, \quad t > 0, \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x), & x \in R^n \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in R^n.\end{aligned}$$

Mild solutions are obtained in the weak- $L^p$  spaces and the existence of self-similar solutions is shown. We prove that the only self-similar solution in the strong  $L^p$  space is the null solution while infinitely many self-similar solutions do exist in weak- $L^p$  spaces. The asymptotic stability of solutions is analyzed and as a consequence, a criterium of self-similarity persistence at large times is obtained.

Sección en el CEDYA 2007: EDP

## Referencias

- [1] S. Chandrasekhar, *Hidrodinamic and Hydromagnetic Stability*. Dover, New york, 1981.
- [2] L.C.F. Ferreira. *Well-posedness and asymptotic behaviour for the convection problem in  $R^n$* . Nonlinearity, 19(2006), 2169-2191.

## Sobre un modelo matemático en morfogénesis

J.IGNACIO TELLO

Dpto. de Matemática Aplicada, E.U.I. Informática, Univ. Politécnica de Madrid

jtello@eui.upm.es

### Resumen

En el trabajo que presentaremos se considera un modelo matemático de ecuaciones diferenciales que modeliza la distribución de morfogenes. Los morfogenes son señales químicas responsables de la diferenciación de las células y de la creación de órganos y formas en los embriones. Distintos modelos han sido propuestos en los últimos años, el modelo estudiado fue propuesto por Lander, Nie y Wang en 2002 para estudiar la morfogénesis en moscas. Los morfogenes son sintetizados en determinados lugares del embrión y distribuidos mediante difusión. Los receptores situados en la superficie de la célula reciben la señal química y dependiendo de la concentración de morfogén recibido, la célula se transforma en uno u otro tipo de células.

El modelo consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales, donde la sustancia química (morfogén) satisface una ecuación diferencial en derivadas parciales de tipo parabólico. Se presentan resultados sobre el comportamiento asintótico de la solución.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP



# Multiplicidad de soluciones estacionarias para un modelo climático con una condición de contorno difusiva no lineal

L.TELLO

Dpto. de Matemática Aplicada, ETS Arquitectura. Univ. Politécnica de Madrid

l.tello@upm.es

J.I. DÍAZ

Dpto. de Matemática Aplicada, F. Matemáticas. Univ. Complutense de Madrid

diaz.racefyn@insde.es

## Resumen

En esta comunicación se considera un modelo climático bidimensional (latitud - profundidad), del tipo del propuesto por R.G. Watts y R. Morantine (*"Rapid climatic change and the deep ocean"*, *Climatic Change* 16, (1990) 83-97) que corresponde al acoplamiento entre la temperatura superficial promediada y la temperatura interior de un océano profundo.

El modelo consiste en una ecuación (que, por ejemplo, se puede suponer lineal) para la temperatura en el océano global junto a una condición de contorno no lineal que proviene del balance de energía en la superficie y que presenta la peculiaridad de ser dinámica y, lo que es más extraordinario, de tipo difusivo (pues incluye derivadas segundas superficiales).

En esta comunicación completamos nuestros resultados previos sobre tal problema mostrando como el modelo es muy sensible frente a pequeñas variaciones del parámetro solar,  $Q$ , que aparece involucrada en la condición de contorno difusiva modelizando la amplitud de un término fuente que tiene cuenta del co-albedo. Mostramos que, incluso en el caso de una ecuación lineal en el interior del dominio espacial, puede aparecer multiplicidad de soluciones estacionarias y analizamos la variación del número de soluciones ante variaciones de  $Q$ .

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

# Dinámica de una ecuación de reacción-difusión con discontinuidades

JOSÉ VALERO

Dpto. de Estadística, Matemática e Informática, Univ. Miguel Hernández de Elche

jvalero@umh.es

ANIBAL RODRÍGUEZ-BERNAL, JOSÉ M. ARRIETA

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Complutense de Madrid

arober@mat.ucm.es, arrieta@mat.ucm.es

## Resumen

En el campo de las ecuaciones de reacción-difusión escalares existen estudios bastante precisos del comportamiento asintótico de las soluciones cuando la parte no lineal de la ecuación es una función suficientemente suave. En particular, bajo condiciones que garantizan la existencia de un atractor global y cuando el número de puntos de equilibrio es finito y existe una función de Lyapunov, es bien conocido que el atractor se compone de los puntos fijos y de las trayectorias heteroclinicas que los unen. En varios trabajos se ha estudiado de manera pormenorizada las posibles conexiones entre los puntos fijos, dando pues una descripción precisa del atractor global, conjunto que contiene la dinámica a largo plazo del sistema. Sin embargo, si la función no lineal de la ecuación no es suficientemente suave (en particular, cuando ésta presenta discontinuidades), los métodos de linealización empleados en estos artículos no son ya aplicables.

En el presente trabajo estudiamos el siguiente problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in H_0(u), & x \in (0, 1), t > 0, \\ u(t, 0) = u_0(x), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \end{cases}$$

siendo  $H_0$  la siguiente función multivaluada:  $H_0(u) = -1$ , si  $u < 0$ ,  $H_0(u) \in [-1, 1]$ ,  $H_0(u) = 1$ , si  $u > 0$ . En primer lugar probamos que esta ecuación posee un número infinito, pero contable, de puntos de equilibrio  $v_0 = 0, v_1^\pm, v_2^\pm, \dots$ , y que pueden ser ordenados usando una función de energía (o función de Lyapunov)  $E(u): E(v_1^\pm) < E(v_2^\pm) < \dots < E(v_0)$ . En segundo lugar estudiamos la estabilidad de los puntos de equilibrio, probando que los puntos  $v_1^+, v_1^-$  son asintóticamente estables, mientras que el resto son inestables. El punto  $v_0 = 0$  posee una propiedad de inestabilidad especial: dado cualquier punto de equilibrio  $v_k \neq 0$ , existe una solución  $u(t)$  con condición inicial  $u(0) = 0$  tal que  $u(t) \rightarrow v_k$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . En particular, esto implica la existencia de una conexión heteroclinica desde  $v_0$  a cualquiera de los demás puntos. Finalmente, estudiamos las posibles conexiones heteroclinicas entre los demás puntos de equilibrio, dando una respuesta parcial a este problema.

Una de las herramientas empleadas en este trabajo es la aproximación de la función  $H_0$  por funciones suaves, obteniendo de esta forma una sucesión de problemas de Chafee-Infante aproximativos. Por tanto, nuestra ecuación se puede considerar como el límite de una sucesión de problemas de Chafee-Infante que sufre la sucesión típica de bifurcaciones de este tipo de problemas.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

# Nontrivial compact blow-up sets of lower dimension in a half-space

MAYTE PÉREZ-LLANOS

Dpto. de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

mtperez@math.uc3m.es

JULIO D. ROSSI

Dpto. de Matemática, Universidad de Buenos Aires

jrossi@dm.uba.ar

## Resumen

In this talk we provide examples of blowing up solutions to parabolic problems in a half space,  $\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^M = \{x_N > 0\} \times \mathbb{R}^M$ , with nontrivial blow-up sets of dimension strictly smaller than the space dimension. To this end we prove existence of a nontrivial compactly supported solution to  $\nabla(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi) = \varphi$  in the half space  $\mathbb{R}_+^N = \{x_N > 0\}$  with the nonlinear boundary condition  $-|\nabla\varphi|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_N} = \varphi^{p-1}$  on  $\partial\mathbb{R}_+^N = \{x_N = 0\}$ .

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] X. Y. Chen and H. Matano. *Convergence, asymptotic periodicity and finite point blow up in one-dimensional semilinear heat equations*. J. Differential Equations, Vol. 78, (1989), 160–190.
- [2] M. Chipot, M. Chlebík, M. Fila and I. Shafrir. *Existence of positive solutions of a semilinear elliptic equation in  $\mathbb{R}_+^n$  with a nonlinear boundary condition*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 223(2), (1998), 429–471.
- [3] C. Cortázar, M. Elgueta and P. Felmer. *Symmetry in an elliptic problem and the blow-up set of a quasilinear heat equation*. Comm. Partial Diff. Eq. Vol. 21(3&4), (1996), 507–520.
- [4] J. Dávila and J. D. Rossi. *Self-similar solutions of the porous medium equation in a half-space with a nonlinear boundary condition. Existence and symmetry*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 296, (2004), 634–649.
- [5] J. Fernández Bonder and J. D. Rossi. *Existence results for the  $p$ -Laplacian with nonlinear boundary conditions*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 263(1), (2001) 195–223.
- [6] J. Filo and M. Pérez-Llanos. *Regional blow-up for a doubly nonlinear equation with nonlinear boundary condition*. To appear in J. Dynam. Differential Equations.
- [7] V. Galaktionov and J. L. Vázquez. *The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations*, Discrete Contin. Dynam. Systems A **8** (2002), 399–433.
- [8] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg. *Symmetry and related properties via the maximum principle*. Comm. Math. Phys. Vol. 68, (1979), 209–243.
- [9] Y. Giga and R. V. Kohn. *Nondegeneracy of blow up for semilinear heat equations*. Comm. Pure Appl. Math. Vol. 42, (1989), 845–884.
- [10] P. Pucci and J. Serrin. *The strong maximum principle revisited*. J. Differential Equations. Vol. 196(1), (2004), 1–66.
- [11] P. Tolksdorf. *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*. J. Differential Equations. Vol. 51 no. 1, (1984), 126–150.

# Análisis de un problema de frontera libre que modela el flujo de hielo polar en un entorno de la *grounding line*.

ANA ISABEL MUÑOZ  
Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Rey Juan Carlos, Madrid  
anaisabel.munoz@urjc.es

MARCO ANTONIO FONTELOS  
Dpto. de Matemáticas, Univ. Autónoma de Madrid  
marco.fontelos@uam.es

## Resumen

En esta comunicación presentaremos el estudio de flujo del hielo en un tipo particular de manto de hielo, denominado en la bibliografía inglesa, *marine ice sheet*. Consideraremos un régimen de flujo estacionario modelado por un problema de Stokes en un dominio bidimensional acotado  $D$ . En particular, se analizará el comportamiento del flujo en un entorno de la *grounding line*, que es la zona donde tiene lugar la transición entre la parte del manto polar que desliza sobre una base sólida rocosa y la parte que flota en el mar. La *grounding line*, por tanto, constituirá una línea de contacto, ya que en esta zona confluyen diferentes condiciones de contorno. En nuestro problema asumiremos que la *grounding line* puede moverse con velocidad constante  $(U, 0)$ . Básicamente, el problema que resolvemos en el interior del dominio el siguiente:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} = \nabla \cdot T = 0, \quad \text{en } D = [-M, M] \times [-1 + b(x), 0], \quad (1)$$

donde  $\vec{v}$  es el campo de velocidades,  $p$  es la presión (en la que se ha incluido el término debido a la gravedad),  $\mu$  es la viscosidad, que asumiremos constante, es decir, consideramos al hielo un fluido newtoniano y  $-1 + b(x)$  localiza la parte del manto que flota sobre el agua marina, cuya localización es a priori desconocida y que denotaremos por  $\Gamma_2$ . Complementamos dicho sistema con las siguientes condiciones de contorno y la prescripción de un flujo de entrada y otro de salida. En la parte del manto en contacto con la atmósfera,  $\Gamma_0$ , consideramos que la componente normal de la velocidad es nula y que los esfuerzos de cizalla son nulos,

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{t} T \vec{n} = 0 \text{ en } \Gamma_0, \quad (2)$$

donde denotamos por  $\vec{t}$  y  $\vec{n}$ , los vectores tangentes y normales unitarios a la superficie. En la base del manto de hielo que está en contacto con el lecho rocoso,  $\Gamma_1$  asumiremos condiciones de no deslizamiento (no-slip), en particular,

$$\vec{v} = (v_1, v_2) = 0 \text{ en } \Gamma_1 \quad (3)$$

y en  $\Gamma_2$ , se considerarán esfuerzos de cizalla nulos y un balance de fuerzas,

$$\vec{t} T \vec{n} = 0 \text{ y } \vec{n} T \vec{n} = \gamma b(x) \text{ en } \Gamma_2 \text{ donde } \gamma \text{ es un parámetro,} \quad (4)$$

junto con una ecuación que describe el movimiento de la frontera libre,

$$U b_x + v_2 - b_x v_1 = 0. \quad (5)$$

Como flujo de entrada supondremos uno de tipo parabólico y de salida, uno uniforme. Probaremos la existencia y unicidad de soluciones para *grounding lines* con ángulo de contacto nulo, vía utilización del teorema de punto fijo de Banach y el teorema de Lax-Milgram, entre otros. También determinaremos la geometría y propiedades asintóticas de la frontera libre, recurriendo en este caso a una formulación en términos de funciones de corriente y utilizando, entre otras técnicas, transformadas de Mellin.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] M.A. Fontelos, A.I. Muñoz. *A free boundary problem in glaciology: The motion of grounding lines*. Interfaces and free boundaries. To appear.
- [2] M.A. Fontelos, J.J. Velázquez. *A free boundary problem for the Stokes system with contact lines*. Commun. in Partial Differential Equations, 23-7&8, (1998), 1209–1303.
- [3] A.C. Fowler. *Mathematics and the environment*. Mathematical Institute lecture notes. Oxford University. <http://www.maths.ox.ac.uk/fowler/courses/mathenvo.html>
- [4] A. Vieli, A. J. Payne. *Assessing the ability of numerical ice sheet models to simulate grounding line migration*. Journal of Geophysical Research-Earth Surface, 110, (2005) Art. No F01003.
- [5] A.V. Wilchinsky, V.A. Chugunov. *Ice stream-ice-shelf transition: theoretical analysis of two-dimensional flow*. Annals of Glaciology, 30, (2000), 153–162.

## Serie de Chebyshev para un operador Schrödinger 1-D ergódico.

J.C. ABDERRAMÁN, M.A. SASTRE, E. TORRANO.  
Grupo de Polinomios Ortogonales y Geometría Fractal.  
Dpto. de Matemática Aplicada. Facultad Informática.  
Universidad Politécnica de Madrid  
jc.abderraman@fi.upm.es, masastre@fi.upm.es, emilio@fi.upm.es.

### Resumen

El estudio de conjuntos de autofunciones  $\{\Psi_n(\epsilon)\}$ ,  $n \in Z^+$ , y del espectro de energías de operadores de Schrödinger unidimensionales ha generado mucho interés, tanto teórico como aplicado. Este tipo de operadores aparecen, por ejemplo, en los modelos de superredes cuánticas dentro de las nanotecnologías emergentes. Otra aplicación puede verse en la referencia [3], donde se estudia el electrón en una red cristalina con potencial periódico y campo magnético transversal uniforme. Hofstadter usó la aproximación *tight binding* y una transformación *gauge* adecuada para, a partir de un operador Schrödinger formulado en una EDP de dos variables, obtener un operador Schrödinger unidimensional. Obtuvo un caso particular,  $\lambda = 1$ , de la ecuación de Harper (1).

$$\Psi_{n+1}(\epsilon) = (\epsilon - 2\lambda \cos(n2\pi\theta + \nu))\Psi_n(\epsilon) - \Psi_{n-1}(\epsilon). \quad (1)$$

Aquí por simplicidad se anula la fase inicial,  $\nu = 0$ . En el caso ergódico,  $\theta$  irracional, el espectro no depende de  $\nu$ . En [3] se aclara el significado físico de los parámetros  $\epsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\theta$  y  $\nu$  para ese problema. La dificultad del análisis del espectro en el caso ergódico y la producción científica que ha generado puede consultarse en [5].

La ecuación (1) es también un caso particular de la relación de recurrencia fundamental de los polinomios ortogonales. Con las condiciones iniciales adecuadas se cumplen las condiciones del teorema de Favard, [2], de la existencia de una medida  $\mu(\epsilon)$  sobre un soporte a determinar, que tiene asociada una familia  $\{\Psi_n(\epsilon)\}$ , de polinomios mónicos ortonormales, autofunciones de (1). En [1] presentamos las autofunciones  $\Psi_n(\epsilon)$  expandidas en serie de Chebyshev de primera clase.

$$\Psi_n(\epsilon) = \sum_{k=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} a_k^{(n)}(\epsilon, \lambda) T_k(\omega). \quad (2)$$

Usamos las propiedades algebraicas de los polinomios de Chebyshev  $\{T_k(\omega)\}$  para separar la variable  $\omega = \cos(2\pi\theta)$  de las variables  $\epsilon$  y  $\lambda$  que se transfieren a los coeficientes de la serie  $\{a_k^{(n)}(\epsilon, \lambda)\}$ . Se obtuvo la expresión recurrente para los  $a_k^{(n)}$ . Por ejemplo, para  $n \geq 6$  resulta:

$$\begin{aligned} a_k^{(n+1)} = & -\lambda a_{k-n}^{(n)} \sigma(n-1) + \epsilon a_k^{(n)} \left(1 - \sigma\left(\frac{(n)(n-1)}{2}\right)\right) - \lambda a_{n-k}^{(n)} (1 - \sigma(n)) \\ & - \lambda a_{k+n}^{(n)} \left(1 - \delta_{k,0} - \sigma\left(\frac{(n)(n-3)}{2}\right)\right) - a_k^{(n-1)} \left(1 - \sigma\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)\right). \end{aligned} \quad (3)$$

( $\sigma(k)$  es la función escalón de Heaviside y  $\delta_{k,0}$  la delta de Kronecker, con  $0 \leq k \leq \frac{(n+1)(n)}{2}$ ).

Aquí obtenemos las matrices de transferencia para los coeficientes  $\{a_k^{(n)}(\epsilon, \lambda)\}$  y, controlando el parámetro  $\lambda$ , estudiamos la convergencia de la serie (2) para  $\Psi_n(\epsilon)$  con el método matricial clásico de las series de Chebyshev, [4].

**Sección en el CEDYA 2007: OTROS TEMAS**

### Referencias

- [1] J.C. Abderramán, *Chebyshev expansion for the eigenfunctions of the almost Mathieu operator*, 6th Int. Congress on Industrial and Applied Math. ICIAM07, Zurich, 2007.
- [2] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach. New York 1978.
- [3] D. F. Hofstadter, *Energy levels and waves functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields*. Physical Review B.14,6,455-460, 1976.
- [4] J. Mason, H. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*, Chapman and Hall/CRC Press, 2003.
- [5] J. Puig, *Cantor Spectrum for the Almost Mathieu Operator*, Comm. Math. Phys. 244(2):297-309, 2004.

# UNA SIMPLIFICACIÓN DEL MÉTODO DE LAPLACE Y APLICACIONES

PEDRO J. PAGOLA, JOSÉ L. LÓPEZ, ESTER PÉREZ

Dpto. de Ingeniería Matemática e Informática, Universidad Pública de Navarra

pedro.pagola@unavarra.es, jl.lopez@unavarra.es, ester.perez@unavarra.es

## Resumen

Multitud de funciones especiales de la física aparecen en problemas de mecánica cuántica como solución de ciertas ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Diversas de estas funciones especiales, tales como las funciones de Bessel, la función hipergeométrica confluyente o las funciones coulombianas por ejemplo, admiten una representación integral de la forma

$$F(x) \equiv \int_a^b e^{-x f(t)} g(t) dt,$$

donde  $x$  representa algún parámetro físico de la teoría en consideración. La evaluación de estas integrales no resulta sencilla en general, pero en muchas ocasiones, ese parámetro  $x$  toma valores elevados (momento angular, radio de una órbita alejada, etc...) En esta situación, resulta interesante disponer de métodos de evaluación aproximada de este tipo de integrales para valores grandes de la variable  $x$ .

El método más utilizado en la práctica es el famoso método de Laplace. La principal dificultad en el método de Laplace para la obtención de desarrollos asintóticos de este tipo de integrales la origina un cambio de variable. Para suavizar esta dificultad, proponemos una factorización del integrando que evita dicho cambio de variable, simplificando enormemente las operaciones.

Por un lado, el cálculo de los coeficientes del desarrollo asintótico es extraordinariamente sencillo. Por otro lado, la secuencia asintótica obtenida con nuestro método es tan sencilla como en el método estándar de Laplace: funciones gamma completas o incompletas. Además, obtenemos una fórmula explícita para los coeficientes de dicho desarrollo, a diferencia de lo que sucede en el método de Laplace, donde rara vez es posible obtener fórmulas explícitas. Más todavía, mediante una reagrupación de términos podemos obtener fórmulas explícitas para los coeficientes del desarrollo de Laplace estándar.

Ilustramos este método con importantes ejemplos de funciones especiales como son la función hipergeométrica confluyente y la función gamma de Euler, obteniendo una fórmula explícita para los coeficientes del desarrollo de Stirling.

**Sección en el CEDYA 2007:** OTROS TEMAS (Teoría de aproximación)

## Referencias

- [1] C.Ferreira, J.L.López and E.Pérez Sinusía, *The incomplete gamma functions for large values of their variables*, accepted in *Adv.Appl.Math.*
- [2] C.Ferreira, J.L.López and E.Pérez Sinusía, *The Gauss hypergeometric function  $F(a, b; c; x)$  for large  $b$  and  $c$*  *J.Comput.Appl.Math.* 197(2006) 568-577.
- [3] C.Ferreira, J.L.López, P.J.Pagola and E.Pérez Sinusía, *The Laplace's and steepest descents methods revised*, accepted in *Int.Math.J.*
- [4] R.B.Paris, *A uniform asymptotic expansion for the incomplete gamma functions*, *J.Comput.Appl.Math.*, 148 (2002), 323-339.

# Existencia de punto fijo positivo para operadores crecientes con aplicaciones a un problema de frontera periódico

JOSÉ ÁNGEL CID

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Jaén

angelcid@ujaen.es

ALBERTO CABADA

Dpto. de Análisis Matemático, Univ. de Santiago de Compostela

cabada@usc.es

## Resumen

Necesitaremos las siguientes definiciones: dado un espacio de Banach real  $N$  decimos que  $K \subset N$  es un cono si  $K$  es cerrado,  $K + K \subset K$ ,  $\lambda K \subset K$  para todo  $\lambda \geq 0$  y  $K \cap (-K) = \{\theta\}$ . Por ejemplo en  $\mathbb{R}^m$  podemos considerar el cono

$$\mathbb{R}_+^m := \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Un cono  $K$  induce en  $N$  el orden parcial  $x \leq y$  si y sólo si  $y - x \in K$ . Diremos que  $K$  es normal si existe una constante  $c > 0$  tal que  $\|x\| \leq c\|y\|$  para todo  $x, y \in N$  con  $x \leq y$ . Si  $\text{int}(K) \neq \emptyset$  el símbolo  $x \ll y$  significa que  $y - x \in \text{int}(K)$ .

En el reciente trabajo [2], H. Persson probó el siguiente teorema de punto fijo para funciones crecientes usando la teoría del grado topológico.

**Teorema 1** *Supongamos que  $f : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m$  es continua y creciente. Sea  $S = \{x \geq 0 : f(x) \leq x\}$ . Si  $S$  es acotado y existe  $x' \gg 0$ ,  $x' \in S$ , entonces existe  $x \geq 0$ ,  $x \neq 0$ , tal que  $x = f(x)$ .*

Nuestro objetivo es presentar la siguiente generalización (véase [1]) del Teorema 1 a espacios de Banach de dimensión infinita usando el Teorema de Krasnoselskii de compresión y expansión de conos (véase [3, Teorema 13.D]). El resultado obtenido es el siguiente:

**Teorema 2** *Sean  $N$  un espacio de Banach real,  $K$  un cono normal con interior no vacío y  $T : K \rightarrow K$  un operador completamente continuo y creciente. Definamos  $S = \{x \in K : Tx \leq x\}$  y supongamos que*

(i) *Existe  $\bar{x} \in S$  tal que  $\bar{x} \gg \theta$ .*

(ii)  *$S$  es acotado.*

*Entonces existe  $x \in K$ ,  $x \neq \theta$ , tal que  $x = Tx$ .*

La aplicación de este resultado nos permite garantizar, bajo condiciones adecuadas en las funciones  $a(t)$  y  $f(t, x)$ , la existencia de solución para el siguiente problema de frontera periódico

$$x''(t) + a(t)x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I = [0, T], \quad x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T).$$

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] A. Cabada y J. A. Cid. *Existence of a non-zero fixed point for nondecreasing operators via Krasnoselskii's fixed point theorem*. Sometido para publicación.
- [2] H. Persson. *A fixed point theorem for monotone functions*. Appl. Math. Lett., **19** (2006), 1207-1209.
- [3] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. I. Fixed-point theorems*, Springer-Verlag, 1986.

# Reduction methods for quasilinear differential-algebraic equations

RICARDO RIAZA

Dpto. de Matemática Aplicada TTI, ETSI Telecomunicación, Universidad Politécnica de Madrid

rrr@mat.upm.es, <http://www.mat.upm.es/~rrr>

## Resumen

Quasilinear autonomous differential-algebraic equations (DAEs) are implicit ODEs of the form

$$A(x)\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

where  $A \in C^\infty(\Omega_0, \mathbb{R}^{n \times n})$  is a rank-deficient matrix-valued mapping,  $f \in C^\infty(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ , and  $\Omega_0$  is an open set in  $\mathbb{R}^n$ . Geometric methods for DAEs aim at an iterative reduction of the problem to an explicit ODE on a lower-dimensional submanifold of  $\Omega_0$ . This approach can be traced back to the seminal work of Dirac on generalized Hamiltonian dynamics [1, 2], and was later developed by Rheinboldt [7], Reich [5, 6], and Rabier and Rheinboldt [3, 4].

Reduction methods are usually based on certain algebraic (typically constant-rank) conditions holding at every reduction step. When these conditions are met the DAE is called *regular*. We will discuss in this talk several recent results concerning the use of reduction techniques in the local classification problem for DAEs under contact equivalence, not only for regular systems but also for *singular* ones, where the above-mentioned conditions fail. Related dynamical aspects will also be addressed.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] P. Dirac, Generalized Hamiltonian dynamics, *Can. J. Math.* **2** (1950) 129-148.
- [2] P. Dirac, Generalized Hamiltonian dynamics, *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A* **246** (1958) 326-332.
- [3] P. J. Rabier and W. C. Rheinboldt, A geometric treatment of implicit differential-algebraic equations, *J. Differential Equations* **109** (1994) 110-146.
- [4] P. J. Rabier and W. C. Rheinboldt, Theoretical and numerical analysis of differential-algebraic equations, *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. VIII, pp. 183-540, North Holland/Elsevier, 2002.
- [5] S. Reich, On a geometrical interpretation of differential-algebraic equations, *Cir. Sys. Sig. Proc.* **9** (1990) 367-382.
- [6] S. Reich, On an existence and uniqueness theory for nonlinear differential-algebraic equations, *Cir. Sys. Sig. Proc.* **10** (1991) 343-359.
- [7] W. C. Rheinboldt, Differential-algebraic systems as differential equations on manifolds, *Math. Comput.* **43** (1984) 473-482.



# The dynamics around the collinear point $L_3$ of the RTBP.

ESTHER BARRABÉS

Dpto. Informàtica y Matemàtica Aplicada, Universitat de Girona  
barrabes@ima.udg.es

JOSEP M. MONDELO

Dpto. Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona  
jmm@mat.uab.cat

MERCÈ OLLÉ

Dpto. Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya  
merce.olle@upc.edu

## Resumen

We consider the Restricted Three Body Problem (RTBP), both the planar and spatial case, and we restrict our attention to the equilibrium point  $L_3$ . Our aim is centered in the description, as global as possible, of the dynamics around this equilibrium point. It is well known that  $L_3$  is of type center $\times$ center $\times$ saddle, and the initial study of the local dynamics around  $L_3$  gives two families of non-linear Lyapunov periodic orbits (associated with the two centers) and a 2-parametric (cantorian) family of 2-dimensional tori (see for example [3] and [2]).

In this work, we compute the objects in the center manifold of  $L_3$ , including the invariant manifolds associated to them. They are computed by purely numerical procedures, in order to avoid the convergence restrictions of the semi-analytical ones (typically used around  $L_1$  or  $L_2$ ). We also deal with homoclinic and heteroclinic connections between periodic orbits or invariant tori. In particular, we develop some numerical tools in order to compute homoclinic and heteroclinic orbits.

In [1], the behaviour of the invariant manifolds of  $L_3$  as  $\mu$  (the mass parameter of RTBP) increases was studied, as well as the homoclinic connections to  $L_3$ . In the present work we initially consider small values of  $\mu$ , as for them the homoclinic connections of  $L_3$  are horseshoe-shaped. After that, other values of  $\mu$  will be considered.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO: Session 1, Dynamical systems and celestial mechanics

## Referencias

- [1] E. Barrabés and M. Ollé. *Invariant manifolds of  $L_3$  and horseshoe motion in the restricted three-body problem*. *Nonlinearity*, 19:2065–2089, 2006.
- [2] G. Gómez and J. M. Mondelo. *The dynamics around the collinear equilibrium points of the RTBP*. *Phys. D*, 157(4):283–321, 2001.
- [3] Àngel Jorba and Josep Masdemont. *Dynamics in the center manifold of the collinear points of the restricted three body problem*. *Phys. D*, 132(1-2):189–213, 1999.

# Estudio de la bifurcación de ciclos límite a partir de un gráfico mediante el inverso de factor integrante.

MAITE GRAU, ISAAC A. GARCÍA  
Departament de Matemàtica. Universitat de Lleida  
mtgrau@matematica.udl.es, garcia@matematica.udl.es

HÉCTOR GIACOMINI  
Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique. Université de Tours (Francia)  
giacomini@phys.univ-tours.fr

## Resumen

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar el número máximo de ciclos límite que pueden bifurcar a partir de un gráfico monodrómico de un sistema diferencial autónomo en el plano con inverso de factor integrante.

Consideramos un sistema diferencial autónomo de la forma:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1)$$

donde  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son funciones analíticas definidas en un abierto  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ . El punto denota la derivación de las variables dependientes  $x$  e  $y$  respecto de la variable real independiente  $t$ .

Recordemos que un gráfico del sistema (1) está formado por un número finito de puntos singulares conectados por órbitas regulares del sistema. Por ejemplo, un gráfico puede estar formado por un sólo punto singular con una órbita homoclínica; este gráfico se llama lazo homoclínico.

Los gráficos pueden tener asociada una aplicación de retorno de Poincaré, es decir, puede existir un entorno del gráfico, quizá sólo en su interior o sólo en su exterior, en el que toda órbita con punto inicial en este entorno tienda al gráfico al hacer  $t \rightarrow \pm\infty$ . Los *gráficos monodrómicos* son aquellos que tienen una aplicación de retorno de Poincaré asociada.

Consideremos un sistema (1) con un gráfico monodrómico, que denotaremos por  $\Gamma$ , y consideremos una perturbación uniparamétrica y analítica de (1). Decimos que un ciclo límite del sistema perturbado bifurca de  $\Gamma$  si éste tiende a  $\Gamma$  al hacer tender el parámetro al valor correspondiente a (1). Nos interesa estudiar el número máximo de ciclos límite que bifurcan de  $\Gamma$ , para una perturbación uniparamétrica y analítica cualquiera de (1).

Una función  $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  no idénticamente nula y de clase  $\mathcal{C}^1$  que satisface la ecuación en derivadas parciales siguiente:

$$P(x, y) \frac{\partial V}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial V}{\partial y} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V(x, y),$$

es un *inverso de factor integrante* del sistema (1). En nuestro trabajo siempre suponemos que el campo (1), y sus perturbaciones, tienen un inverso de factor integrante analítico definido en un entorno de  $\Gamma$ .

Sean  $(\phi_i(s), \psi_i(s))$ , con  $s \in \mathcal{I}_i \subseteq \mathbb{R}$  e  $i = 1, 2, \dots, k$ , parametrizaciones de cada una de las órbitas regulares que forman el gráfico  $\Gamma$ . Dado un punto  $(x, y)$  en un entorno suficientemente pequeño de una órbita  $(\phi_i(s), \psi_i(s))$ , siempre podemos encontrar valores de  $s$  y  $n$  que realicen el siguiente cambio de variables:  $x = \phi_i(s) + n\psi_i'(s)$ ,  $y = \psi_i(s) - n\phi_i'(s)$ . Notemos que la variable  $n$  considerada mide la distancia perpendicular a  $\Gamma$ . Si se satisface que

$$V(\phi_i(s) + n\psi_i'(s), \psi_i(s) - n\phi_i'(s)) = n^{m_i} v_i(s) + \mathcal{O}(n^{m_i+1}),$$

donde  $m_i$  es un entero,  $m_i \geq 1$ , y la función  $v_i(s)$  no es idénticamente nula para ningún  $i = 1, 2, \dots, k$ , decimos que  $V$  tiene multiplicidad  $m = \min_{i=1, \dots, k} (m_i)$  en el gráfico  $\Gamma$ .

Nuestro resultado muestra que, si el sistema (1) tiene un inverso de factor integrante analítico definido en un entorno del gráfico monodrómico  $\Gamma$  y de multiplicidad  $m$  en  $\Gamma$ , entonces a lo sumo bifurcan  $m$  ciclos límite de  $\Gamma$ .

Estudiamos varios ejemplos de sistemas en el plano que ilustran este resultado.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

# El Problema del Centro en algunas familias polinomiales

PAZ DE PRADA, JAUME GINÉ

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Lleida

pdeprada@matematica.udl.es, gine@matematica.udl.es

## Resumen

Este trabajo se enmarca en el problema del centro no degenerado en sistemas polinomiales planos. Más específicamente estudiaremos primero sistemas polinomiales de la forma:

$$\dot{x} = -y + xR(x, y), \quad \dot{y} = x + yR(x, y),$$

con  $R(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x, y)$  donde  $f_i$  son polinomios homogéneos de grado  $i$ . Estos sistemas son llamados *isócronos rígidos* y en coordenadas polares toman la forma  $\dot{r} = F(r, \theta)$ , y  $\dot{\theta} = 1$ , véase [5, 6]. El problema del centro para dichos sistemas ha sido estudiado por distintos autores. En [5], se estudió el caso en que  $R(x, y)$  sea un polinomio homogéneo de grado  $i$ . En el caso no homogéneo se han estudiado los sistemas con  $R(x, y) = f_1 + f_2 + f_3$  con  $f_1 f_2 f_3 \neq 0$ , véase [4], y con  $R(x, y) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$  con  $f_4 \neq 0$  y una única  $f_i$  no nula con  $i = 1, 2, 3$ , véase [1]. También se han estudiado los casos  $R(x, y) = f_1 + f_n$  y  $R(x, y) = f_2(x, y) + f_{2n}$  con  $n$  natural, véase [2, 3]. En todos estos casos, las familias de centros que aparecen son reversibles, es decir, simétricos respecto a una recta que pasa por el origen, cambiando la dirección del tiempo y son invariantes bajo la transformación:  $(x, y, t) \rightarrow (x, -y, -t)$  o  $(x, y, t) \rightarrow (-x, y, -t)$ , módulo una rotación.

En este trabajo se estudia la existencia de centros no reversibles en los sistemas isócronos rígidos y la posible forma de sus conmutadores.

La segunda familia de sistemas polinomiales que se estudia es

$$\dot{x} = -y + F(x), \quad \dot{y} = x + G(y),$$

donde  $F(x)$  y  $G(y)$  son polinomios sin términos constantes ni lineales. Estos sistemas reciben el nombre de sistemas de *BiLiénard*, véase [7]. El problema del centro ha sido estudiado con  $F(x)$  y  $G(y)$  polinomios hasta cuarto grado, véase [7, 8] y se conocen familias de centro para  $F(x)$  y  $G(y)$  de grado arbitrario. En este trabajo clasificamos todos los centros de los sistemas de BiLiénard hasta grado 5.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] A. Algaba, M. Reyes, A. Bravo, *Uniformly isochronous quintic planar vector fields*. International Conference on Differential Equations, Vol. 2 (Berlin, 1999), 1415–1417, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.
- [2] A. Algaba, M. Reyes, *Computing center conditions for vector fields with constant angular speed*. J. Comput. Appl. Math. 154 (2003), no. 1, 143–159.
- [3] A. Algaba, M. Reyes, *Centers with degenerate infinity and their commutators*. J. Math. Anal. Appl. 278 (2003), no. 1, 109–124.
- [4] J. Chavarriga, I. A. García, J. Giné, *On integrability of differential equations defined by the sum of homogeneous vector fields with degenerate infinity*. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 11 (2001), no. 3, 711–722.
- [5] R. Conti, *Uniformly isochronous centers of polynomial systems in  $R^2$* . Differential equations, dynamical systems, and control science, 21–31, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 152, Dekker, New York, 1994.
- [6] R. Conti, *Centers of planar polynomial systems. A review*. Matematiche (Catania) 53 (1998), no. 2, 207–240 (1999).
- [7] A. Gasull, J. Torregrosa, *A new approach to the computation of the Lyapunov constants*. Comput. Appl. Math. 20 (2001), no. 1-2, 149–177.
- [8] J. Giné, X. Santallusia, *On the Poincaré-Lyapunov constants and the Poincaré series*. Appl. Math. (Warsaw) 28 (2001), no. 1, 17–30.

# Conexiones globales en Sistemas Tridimensionales Lineales a Trozos

ELISABETH GARCÍA MEDINA, VICTORIANO CARMONA CENTENO,  
FERNANDO FERNÁNDEZ-SÁNCHEZ

Dpto. de Matemática Aplicada II, Univ. de Sevilla

egarme@us.es, vcarmona@us.es, fefesan@us.es

ANTONIO E. TERUEL AGUILAR

Dpto. de Ciencias Matemáticas e Informática, Univ. Islas Baleares

antonioe.teruel@uib.es

## Resumen

En el análisis del comportamiento dinámico de un sistema tridimensional de ecuaciones diferenciales resulta interesante la determinación de sus posibles conexiones homoclinas y heteroclinas ya que, como es bien sabido, organizan una estructura dinámica rica y complicada [5]. No obstante, suele ser una tarea ardua y difícil probar que un determinado sistema dinámico posee una conexión global y, por ello, se suele recurrir a técnicas numéricas para mostrar su existencia.

Por otra parte, los sistemas lineales a trozos están siendo extensivamente estudiados en la actualidad porque modelan fielmente determinados procesos físicos, véase por ejemplo [2]. Además, estos sistemas son capaces de reproducir comportamientos dinámicos análogos a los de los sistemas diferenciables, ver [1], incluyendo, entre otros, los fenómenos relacionados con las conexiones homoclinas y heteroclinas [2]. A pesar de la linealidad en cada zona, la prueba de la existencia de estas conexiones globales queda muy lejos de ser trivial y, en consecuencia, también es frecuente usar herramientas numéricas para su determinación [3].

Presentamos en esta comunicación una técnica para probar de forma analítica la existencia de conexiones globales en sistemas continuos lineales a trozos. Más concretamente, utilizamos esta técnica para demostrar la existencia de dos conexiones homoclinas y un ciclo heteroclinico (tipo punto-T) en una familia uniparamétrica de sistemas continuos lineales a trozos tridimensionales con dos zonas, reversibles y con trazas nulas. Un representante de esta familia es el sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = 1 - y - \lambda(1 + \lambda^2)|x|, \quad \text{con } \lambda > 0, \quad (1)$$

que también puede entenderse como una versión lineal a trozos del sistema de Michelson [4]. Nuestra principal aportación, en relación al sistema (1), la enunciamos a continuación.

**Teorema:** Existen dos valores  $\lambda_1, \lambda_2 > \frac{1}{2}$  de forma que el sistema (1) para  $\lambda = \lambda_1$  posee dos homoclinas y para  $\lambda = \lambda_2$  un ciclo heteroclinico tipo punto-T.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] V. Carmona E. Freire, E. Ponce & F. Torres, *Invariant Manifolds of Periodic Orbit for Piecewise Linear Three-Dimensional System*, IMA J. Appl. Math, **69** (2004), 71-91.
- [2] R. N. Madan, *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos*, ser. B Singapore: World Scientific, (1993).
- [3] R. O. Medrano, M.S. Baptista & I.L. Caldas; *Homoclinic orbits in a piecewise systems and their relation with invariant sets*, Physica D **186** (2003), 133-147.
- [4] D. Michelson, *Steady solutions of the Kuramoto Sivashinsky equation*, Physica D **19** (1986), 89-111.
- [5] L. P. Shil'nikov, *A contribution to the problem of the structure of an extended neighbourhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type*, Math. USSR Sbornik **10** (1970), 91-102.

## Evolución paramétrica del sistema de Lorenz

R. BARRIO

GME, Depto. Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, E-50009 Zaragoza, Spain

rbarrio@unizar.es

<http://gme.unizar.es>

S. SERRANO

GME, Depto. Informática e Ingeniería de Sistemas, Universidad de Zaragoza, E-50015 Zaragoza, Spain.

sserrano@unizar.es

<http://gme.unizar.es>

F. BLESÁ

GME, Depto. Física Aplicada, Universidad de Zaragoza, E-50009 Zaragoza, Spain

fblesa@unizar.es

<http://gme.unizar.es>

### Resumen

El sistema de Lorenz [4] es el problema por excelencia a la hora de hablar de sistemas caóticos. A lo largo de los últimos 40 años ha sido estudiado utilizando diversas técnicas, tanto numéricas como analíticas. Las ecuaciones clásicas de Lorenz son

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \quad \dot{y} = -xz + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz, \quad (1)$$

donde aparecen tres parámetros de control adimensionales:  $\sigma$  el número de Prandtl,  $b$  una constante positiva de orden 1, y  $r$  el número de Rayleigh relativo. Este modelo es una versión altamente simplificada de un problema real para el cual ciertos valores de los parámetros no tiene sentido, pero desde el punto de vista matemático una interesante pregunta es la siguiente: ¿cómo evoluciona el sistema de Lorenz con respecto de los tres parámetros? En la literatura la mayor parte de los análisis se restringen a fijar dos de ellos y variar solamente uno. Recientemente ha aparecido una referencia en la que se fija uno de los parámetros y se cambian los otros dos [3].

Nosotros, en esta comunicación estudiamos el sistema de Lorenz con respecto de los tres parámetros, dando por tanto una visión global del mismo. Para ello utilizamos diversas técnicas numéricas, siendo la más útil el recientemente introducido indicador de caos OFLI2 [1, 2], el cual nos permite localizar las regiones en las cuales podemos esperar un comportamiento caótico. Los resultados obtenidos con OFLI2 se comparan con los obtenidos con MLE (Maximum Lyapunov Exponent) y con diagramas de bifurcaciones realizados con AUTO.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

### Referencias

- [1] R. Barrio, *Sensitivity tools vs. Poincaré sections*, Chaos Solitons Fractals 25 (3) (2005), 711-726.
- [2] R. Barrio, *Painting chaos: a gallery of sensitivity plots of classical problems*, Internat. J. Bifur. Chaos 16 (10) (2006), 2777-2798.
- [3] H.R. Dullin, S. Schmidt, P.H. Richter and S.K. Grossmann, *Extended phase diagram of the Lorenz model*, <http://www.citebase.org/cgi-bin/citations?id=oai:arXiv.org:nlin/0504024>, (2005).
- [4] E.N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of the Atmospheric Sciences Solitons Fractals 20 (1963), 130-141.

# Some qualitative results on magnetic vector fields

DANIEL PERALTA-SALAS

Dpto. de Matemáticas, Univ. Carlos III de Madrid

dperalta@math.uc3m.es

## Resumen

In this work I will focus on a class of vector fields which is particularly important in Physics and multidisciplinary applications, i.e. magnetic fields created by DC (direct current) flows. The mathematical description of these fields involve a smooth curve  $L$  in  $\mathbb{R}^3$ , parametrized by the embedding map  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , which represents the electric wire, and a constant  $J$  which stands for the current intensity. The magnetic field  $B$  evaluated at the point  $r \in \mathbb{R}^3$  is obtained from Biot-Savart law, as was discovered in the XVIII century:

$$B(r) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{\tau}(t) \wedge (r - \tau(t))}{|r - \tau(t)|^3}, \quad (1)$$

where  $\mu_0$  denotes the magnetic permeability constant, the dot over  $\tau$  stands for the derivative with respect to  $t$  and  $\wedge$  and  $|\cdot|$  represent the standard vector product and Euclidean norm in  $\mathbb{R}^3$ . If  $L$  is a closed curve then the integration sign must be substituted by  $\oint$ . Eq. (1) is the main formula of magnetostatics and yields the magnetic field created by the current distribution  $(L, J)$ . According to the superposition principle the magnetic field created by  $n$  wires  $(L_1, J_1), \dots, (L_n, J_n)$  is given by the sum  $B = \sum_{i=1}^n B_i$  of the individual magnetic fields  $B_i$  obtained from Biot-Savart law.

The results on this topic that I will report are the following:

1. Study of magnetic fields with Euclidean or radial symmetries: existence of first integrals and description of the phase portrait structure. I will also present the “non-swallowing” property for the motion of charged particles. These results are based on papers [3] and [4].
2. Examples of magnetic fields exhibiting the main features of Hamiltonian chaos: quasi-periodic orbits, KAM islands and homoclinic tangles. These results are based on paper [2].
3. Study of magnetic fields created by rectilinear configurations of wires: existence of first integrals and examples with open magnetic lines and chaos. I will also present some counterexamples to Stefanescu’s conjecture which claims that certain kinds of magnetic fields possess a non-trivial polynomial first integral. These results are based on paper [1].

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] J. Aguirre, J. Giné and D. Peralta-Salas, Integrability of magnetic fields created by current distributions. Preprint (2007).
- [2] J. Aguirre and D. Peralta-Salas, Realistic examples of chaotic magnetic fields created by wires. Preprint (2006).
- [3] F. González-Gascón and D. Peralta-Salas, Motion of a charge in the magnetic field created by wires: impossibility of reaching the wires. *Phys. Lett. A* **333**, 72-78 (2004).
- [4] F. González-Gascón and D. Peralta-Salas, Some properties of the magnetic fields generated by symmetric configurations of wires. *Phys. D* **206**, 109-120 (2005).

# Los elementos finitos de alto orden (hp-FEM) como método de cálculo en problemas de estabilidad fluidodinámica.

MAITE PEÑA ALCARÁZ

ETS de Ingeniería, Univ. Pontificia Comillas  
maitepalcaraz@hotmail.com

LEO MIGUEL GONZÁLEZ GUTIÉRREZ

ETS Ingenieros Navales, Univ. Politécnica de Madrid  
leo.gonzalez@upm.es

VASSILIS THEOFILIS

ETS Ingenieros Aeronáuticos, Univ. Politécnica de Madrid  
vassilis@torroja.dmt.upm.es

## Resumen

En los problemas de estabilidad BiGlobal en un contexto fluidodinámico nos hemos encontrado con un cierto tipo de condicionantes que nuestro método numérico debe ser capaz de satisfacer. Por un lado y como condición más indispensable, el método debe ser capaz de discretizar cualquier dominio espacial de forma que no quede sujeto a formas simples o fácilmente transformables a estas, en segundo lugar queremos que las condiciones de contorno necesarias en los típicos problemas de Mecánica de Fluidos sean fácilmente implementables y por último que el orden del método elegido en la resolución del problema sea fácilmente variable en función de la precisión exigida. En nuestro contexto la precisión necesaria se incrementa con el número de Reynolds del problema, y por tanto es muy ventajoso que no se sea el tamaño de la malla el único grado de libertad para mejorar la precisión del cálculo, ver [1] y [2]. Con todos estos condicionantes hemos construido un código basado en los elementos finitos de alto orden (hp-FEM) que ha sido aplicado al cálculo de los valores propios y los modos de problemas clásicos de la Mecánica de Fluidos como son el movimiento de fluidos en un conducto.

La descripción clásica de la teoría de estabilidad BiGlobal se basa en una perturbación lineal de las ecuaciones de Navier-Stokes alrededor de un flujo base  $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ , el cual es una solución particular de las mismas. El cálculo de esta solución particular  $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$  se ha obtenido resolviendo una ecuación de Poisson con gradiente de presión favorable y constante en todo el dominio mediante hp-FEM. Una vez se ha calculado el flujo base se ha linealizado el problema entorno a dicha solución mediante el ansatz:

$$u_i(x, y, z, t) = \bar{U}_i(x, y) + \epsilon \hat{u}_i(x, y) e^{i\omega t} e^{i\beta z} \quad (1)$$

$$p(x, y, z, t) = \bar{P}(x, y) + \epsilon \hat{p}(x, y) e^{i\omega t} e^{i\beta z} \quad (2)$$

Considerando  $\epsilon \ll 1$ , tenemos que  $(\hat{u}_i, \hat{p})$  representan las amplitudes de la perturbación, el número complejo  $\omega$  contiene como parte imaginaria la tasa de crecimiento y como parte real la frecuencia de dicha perturbación,  $\beta = \frac{2\pi}{L_z}$  y  $L_z$  la longitud de onda de la perturbación. Al introducir este ansatz en las ecuaciones de Navier-Stokes linealizadas llegamos a un problema de autovalores generalizado del tipo:

$$A\psi = \omega B\psi. \quad (3)$$

En nuestro caso, hemos aplicado el método de Arnoldi para el cálculo del espectro y los modos propios. Como resultados del trabajo se muestran el cálculo del flujo base de una tubería triangular y el posterior análisis de estabilidad BiGlobal de dicho flujo base. Los resultados han sido coherentes y en buena consonancia con los obtenidos mediante otros métodos en la literatura clásica, ver [3].

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] G.E.Karniadakis and S. Sherwin, *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics*, Oxford Science Publications, 2005.
- [2] Ch. Schwab. *p and hp-Finite Element Methods. Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics*. Oxford Science Publications, 2004.
- [3] L.González and V.Theofilis. *Finite-element numerical methods for viscous incompressible BiGlobal linear instability analysis on unstructured meshes*. AIAA Journal, en prensa.

# Un problema inverso emergente en el estudio de los movimientos con rotaciones intrínsecas no coaxiales de un disco

GABRIEL BARCELÓ

Advanced Dynamics, S.A., Madrid

gabarc@iies.es

JESUS ILDEFONSO DÍAZ, ÁNGEL MANUEL RAMOS

Departamento de Matemática Aplcada, Univ. Complutense de Madrid

diaz.racefyn@insde.es, angel@mat.ucm.es

## Resumen

En esta comunicación se aborda el problema inverso de hallar el vector velocidad angular  $\widehat{\omega}(t)$  caracterizando el movimiento de rotación de un sólido rígido (que aquí se supone por simplicidad limitado a un sencillo disco plano) sabiendo que la descripción de velocidades relativas es de la forma  $-\delta w \sin(\mu)\widehat{e}_1(t) + \delta w \cos(\mu)\widehat{e}_2(t) + \Omega\delta \cos(\omega t + \mu)\widehat{e}_3(t)$  para un punto de posición relativa  $\widehat{r}_P(t) = \delta \cos(\mu)\widehat{e}_1(t) + \delta \sin(\mu)\widehat{e}_2(t)$  con respecto a un sistema de referencia (no inercial) solidario al sólido  $\widehat{\mathcal{R}}_S(t) = \{\widehat{O}(t); \widehat{e}_1(t), \widehat{e}_2(t), \widehat{e}_3(t)\}$ , en donde  $\widehat{O}(t)$  es el centro de masa.

Tal cuestión, motivada por el comportamiento observado sobre ciertos prototipos construidos por Advanced Dynamics S.A., fue el objeto del contrato (artículo 83 de la LRU, proyecto 5282122 de la Fundación General Complutense) entre dicha empresa y los autores de la comunicación de la UCM.

Aunque la cuestión planteada puede ser abordada mediante las técnicas de eliminación para sistemas semi-implícitos asociados a problemas de controlabilidad no lineal, al tomar como control el vector velocidad angular  $\widehat{\omega}(t)$  (véase, por ejemplo, la monografía de Khalil [1]), aquí seguimos un proceso enteramente original y distinto consistente en la aplicación de un proceso iterativo basado en la inversión de las ecuaciones diferenciales implicadas. A este respecto, en vez de utilizar los tres ángulos de Euler para caracterizar la posición de los vectores de la base relativa respecto de un sistema de referencia absoluto, obtenemos la descripción del sistema de ecuaciones apelando a la caracterización de Coriolis-Poisson del vector  $\widehat{\omega}(t)$  en términos de las derivadas de los vectores  $\widehat{e}_i(t), i = 1, 2, 3$ . Se resuelve iterativamente el sistema de 9 ecuaciones escalares resultantes y se analiza la delicada cuestión de la inversión de la restricción algebraica (equivalente a la condición de observabilidad no lineal) mostrándose, finalmente, la convergencia de tal esquema iterativo. Diversas experiencias numéricas completan este primer estudio, al que sigue un nuevo proyecto más completo actualmente en desarrollo.

**Sección en el CEDYA 2007:** Modelos y Aplicaciones Industriales.

## Referencias

- [1] H.J. Khalil, *Nonlinear Systems*, Second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.



# A stabilized difference scheme for deformable porous media and its numerical resolution on block-structured grids by multigrid methods

GASPAR F.J., LISBONA, F.J., RODRIGO, C.,

Department of Applied Mathematics, University of Zaragoza.

fjgaspar@unizar.es, lisbona@unizar.es

## Resumen

The classical quasi-static Biot model [1] for soil consolidation, describes mathematically the time dependent interaction between the deformation of an elastic porous material and the fluid flow inside of it. This model can be formulated as a system of partial differential equations for the unknowns displacement and pressure. By  $\mathbf{u} = (u, v)$  we denote the displacement vector and by  $p$  the pore pressure of the fluid. Here, we consider the case of a homogeneous, isotropic and incompressible medium  $\Omega$ , so the governing equations are given by

$$-\mu\tilde{\Delta}\mathbf{u} - (\lambda + \mu)\text{grad div } \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \mathbf{u}) - \frac{\kappa}{\eta}\Delta p = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

where  $\lambda$  and  $\mu$  are the Lamé coefficients,  $\kappa$  is the permeability of the porous medium,  $\eta$  the viscosity of the fluid and  $\tilde{\Delta}$  represents the vectorial Laplace operator. The quantity  $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  is the dilatation, i.e. the volume increase rate of the system, which can be considered as a measure of the change in porosity of the soil. The source terms  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  and  $f(\mathbf{x}, t)$  are used to represent a density of applied body forces and a forced fluid extraction or injection process respectively.

When a load is applied on an elastic and saturated porous medium, the pressure suddenly increases and a sharp boundary layer can appear in the early stages of the time-dependent process. In the case of an unstable discretization, unphysical oscillations appear. A stabilized finite difference scheme on collocated grids based on the perturbation of the flow equation was proposed in [2], which provides us solutions without oscillations independently of the chosen discretization parameters.

When discretizing the incompressible poroelasticity equations with standard second order central differences and an artificial pressure term, the development of multigrid smoothing methods is not straightforward. Smoothing factors of standard collective point-wise relaxations are not satisfactory. A possibility to overcome this problem is to extend the idea of box relaxation to the non-staggered case. By other hand, if grid applications are to be implemented on parallel computers, grid partitioning is a natural approach. In this approach, the original grid is split into  $P$  subdomains such that  $P$  available processors can jointly solve the discrete problem. Grid partitioning is the natural parallelization for multigrid. We present here an efficient multigrid solver for the poroelasticity problem with block-structured grids in a grid partitioning environment.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] M. Biot, *General theory of three dimensional consolidatio*, J. Appl. Phys. **12** (1941) 155-169.
- [2] F. J. Gaspar, F. J. Lisbona, C. W. Oosterlee, and P.Ñ. Vabishchevich, An efficient multigrid solver for a reformulated version of the poroelasticity system. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2007; **196**:1447-1457.

# Métodos numéricos basados en ecuaciones modificadas para ecuaciones de evolución no lineales con soluciones de tipo compactón

FRANCISCO RUS, FRANCISCO R. VILLATORO

Dpto. de Lenguajes y Ciencias de la Computación, Univ. de Málaga  
rusman@lcc.uma.es, villa@lcc.uma.es

## Resumen

Los compactones son soluciones de tipo onda solitaria de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que se caracterizan por presentar soporte compacto. Fueron descubiertos por Rosenau y Hyman [1] en la ecuación  $K(n, n)$  dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial^3 u^n}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

donde  $u(x, t)$  es la amplitud de la onda,  $x$  es la coordenada espacial y  $t$  es el tiempo. Los compactones son soluciones clásicas sólo para  $1 < n \leq 3$ , siendo débiles en otro caso. La solución de tipo compactón general de la ecuación (1), para  $n \notin \{-1, 0, 1\}$ , se puede escribir como [2]

$$u_c(x, t) = \begin{cases} (\alpha \cos^2(\beta(x - x_0 - ct)))^\mu, & |x - x_0 - ct| \leq \frac{\pi}{2\beta}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

donde  $c$  es la velocidad del compactón,  $x_0$  la posición de su máximo en  $t = 0$ ,  $\alpha = 2cn/(n+1)$ ,  $\beta = (n-1)/(2n)$ , y  $\mu = 1/(n-1)$ .

Para la simulación numérica de la propagación de compactones los métodos pseudo-espectrales en espacio son los más utilizados [1], aunque requieren el uso de disipación artificial (hiperviscosidad) y el uso de filtros paso bajo. Utilizando estos métodos [1] se mostró que los compactones colisionan entre sí de forma robusta, recuperando su forma y propiedades tras la colisión, aunque generando un pequeño residuo de masa nula que marca la posición de la misma. Utilizando métodos numéricos de diferencias finitas [3], de Padé [4] y de elementos finitos [5, 6] parece que este residuo presenta una onda de choque interna (aunque ello no ha sido demostrado de forma rigurosa). Estos métodos también requieren la adición de disipación artificial pero sin filtrado.

El método de ecuaciones modificadas [7] consiste en añadir a la ecuación continua original una serie de términos que conducen a que la solución modificada se parezca más al resultado numérico que la original. Este método también permite el desarrollo de nuevos métodos numéricos de mayor orden.

En este trabajo se presentarán dos nuevos métodos numéricos basados en correcciones de la ecuación modificada del método de diferencias finitas de Ismail-Taha [3], que es de segundo orden en espacio y tiempo. Los nuevos métodos desarrollados son de cuarto y sexto orden en espacio, manteniendo el segundo orden en tiempo. Un análisis de la estabilidad lineal de estos métodos muestra su estabilidad incondicional. Además, dichos métodos preservan el primer invariante de la ecuación  $K(n, n)$  de forma exacta.

Los resultados numéricos obtenidos con los nuevos métodos muestran que los fenómenos de carácter espurio que acompañan a los compactones numéricos del método de Ismail-Taha son fuertemente reducidos. El orden de consistencia de estos nuevos métodos numéricos es consistente con el esperado teóricamente.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] P. Rosenau, J. M. Hyman. *Compactons: Solitons with finite wavelength*. Phys. Rev. Lett., 70 (1993) 564–567.
- [2] P. Rosenau. *On a class of nonlinear dispersive-dissipative interactions*. Physica D, 123 (1998) 525–546.
- [3] M. S. Ismail, T. R. Taha. *A numerical study of compactons*. Math. Comput. Simul., 47 (1998) 519–530.
- [4] F. Rus and F.R. Villatoro. *Padé Numerical Method for the Rosenau-Hyman Compacton Equation*. Math. Comput. Simul., In Press (2007) doi:10.1016/j.matcom.2007.01.016.
- [5] J. de Frutos, M. A. López-Marcos, J. M. Sanz-Serna. *A finite difference scheme for the  $K(2, 2)$  compacton equation*. J. Comput. Phys., 120 (1995) 248–252.
- [6] J. Garralón, F. Rus, and F.R. Villatoro. *Compacton Numerically-Induced Radiation in a Fourth-Order Finite Element Method*. WSEAS T. Math., 5 (2006) 89–96.
- [7] F.R. Villatoro, J.I. Ramos. *On the method of modified equations. I-V*. Appl. Math. Comput., 103 (1999) 111–285.

# Sobre el método de Godunov para sistemas hiperbólicos no conservativos

MARÍA LUZ MUÑOZ RUIZ

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Málaga

[munoz@anamat.cie.uma.es](mailto:munoz@anamat.cie.uma.es)

CARLOS PARÉS MADROÑAL

Dpto. de Análisis Matemático, Univ. de Málaga

[pares@anamat.cie.uma.es](mailto:pares@anamat.cie.uma.es)

## Resumen

En este trabajo se aborda la aproximación numérica del problema de Cauchy para sistemas hiperbólicos no conservativos en dimensión uno. Para definir el concepto de solución débil de dichos sistemas utilizamos la teoría desarrollada por Dal Maso, Le Floch y Murat, según la cual los productos no conservativos pueden ser interpretados como medidas de Borel asociadas a la elección de una familia de caminos en el espacio de estados. Aunque esta familia de caminos pudiera ser elegida de modo arbitrario, parece natural pedirle que satisfaga ciertas hipótesis concernientes a la relación de los caminos con las curvas integrales de los campos característicos. En primer lugar, establecemos tres hipótesis básicas de este tipo y estudiamos las consecuencias a que da lugar la elección de una familia de caminos que satisfaga dichas hipótesis. En particular, probamos que esta elección permite obtener una expresión del método de Godunov que generaliza su expresión clásica para sistemas de leyes de conservación. También estudiamos las propiedades de buen equilibrio de estos métodos. Finalmente, probamos la consistencia del esquema numérico obtenido con la definición de soluciones débiles. En concreto, probamos que, bajo la hipótesis de variación total acotada, si las aproximaciones obtenidas mediante un método de Godunov basado en una familia de caminos converge uniformemente a alguna función cuando la malla se refina, entonces esta función es una solución débil del sistema no conservativo, relativa a esa familia de caminos. Este resultado se extiende a los esquemas numéricos basados en Resolvedores de Riemann Aproximados.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] G. Dal Maso, P.G. LeFloch, F. Murat. *Definition and weak stability of nonconservative products*. J. Math. Pures Appl., 74 (1995), 483-548.
- [2] C. Parés, M.J. Castro. *On the well-balance property of Roe's method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to shallow water systems*. ESAIM: M2AN, 38(5) (2004), 821-852.
- [3] C. Parés. *Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework*. SIAM J. Numer. Anal., 44(1) (2006), 300-321.

# Multigrid methods and automatic segmentation: an application to CT images of the liver

J.F. GARAMENDI, N. MALPICA

Dpto. Ingeniería Telemática y Tecnología Electrónica, Univ. Rey Juan Carlos de Madrid  
juanfrancisco.garamendi@urjc, norberto.malpica@urjc.es

E. SCHIAVI

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Rey Juan Carlos de Madrid  
emanuele.schiavi@urjc.es

## Resumen

Quantitative analysis of CT and MRI medical images provides an extremely useful tool for medical diagnosis [1]. This analysis is based on image denoising, voxel-based tissue classification, segmentation of organs and tissue boundaries, estimation of physiological parameters and other imaging techniques. In this talk we address the practical problem of liver volumetry as a required step for the clinical planning of liver surgery and resection. For this application, we consider a segmentation technique based on the Chan-Vese model [2] which lead us to a nonlinear diffusion process driven by some low order local statistics of the image.

Once the model is built up, the computational cost of the image processing represents, usually, the trade off between good segmentation and numerical efficiency. In fact, typical 3D images cannot be efficiently processed with a descent method (which amounts to consider the naturally associated parabolic problem and waiting for stabilization) and this motivates our work whereas a quasilinear elliptic equation is numerically solved by a fully 3D multigrid method [3, 4]. We show the results on different data sets and the obtained segmentation is compared to manual delineation by an expert. The computational issues shall be discussed compared to a classic descent method.

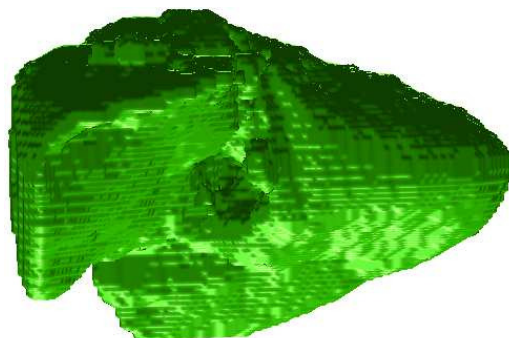


Figura 1: This figure shows the result of the segmentation of the liver using the Chan-Vese algorithm applied to a CT 3D image. The image used in our study were acquired at the Alcorcon Hospital in Madrid. The dimensions are (512x512x40); spatial resolution is (0.74x0.74) mm and slice thickness is 5 mm.

Sección en el CEDYA 2007: AN

## Referencias

- [1] James S. Duncan , Nicholas Ayache: *Medical Image Analysis: Progress over Two Decades and the Challenges Ahead* IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence January 2000 (Vol. 22, No. 1) pp. 85-106
- [2] Tony F. Chan and Luminita A. Vese. *Active Contours without Edges* IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10 no. 2, 266-277
- [3] A. Brandt. *Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems*. Mathematics of Computation,31(138):333-390, Apr. 1977.
- [4] W. L. Briggs, V. E. Henson, and S. F. McCormick. *A Multigrid Tutorial*. SIAM, Philadelphia, second edition,2000.

# Error estimates of optimal order in a fractional-step scheme for the 3D Navier-Stokes equations

M. VICTORIA REDONDO NEBLE

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Cádiz

victoria.redondo@uca.es

FRANCISCO GUILLÉN GONZÁLEZ

Dpto. EDAN, Univ. de Sevilla

guillen@us.es

## Resumen

We present some improvements on the error estimates obtained by J.Blasco and R.Codina [?, ?] for a viscosity-splitting in time scheme, with finite element approximation, applied to the Navier-Stokes equations. The key is to obtain new error estimates for the discrete in time derivative of velocity, which let us to reach, in particular, error of order one (in time and space) for the pressure approximation.

The unsteady, incompressible Navier-Stokes equations in a bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  is:

$$(P) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{in } \Omega, \end{cases}$$

where  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  is the velocity of the fluid at position  $\mathbf{x} \in \Omega$  and time  $t \in (0, T)$ ,  $p(\mathbf{x}, t)$  the pressure,  $\nu > 0$  the viscosity (which is assumed constant) and  $\mathbf{f}$  the external force.

We will study a viscosity-splitting scheme, introduced and studied by J.Blasco and R.Codina [?, ?, ?]. It is a two-step scheme, where the main numerical difficulties of (P) (namely, the treatment of nonlinear term  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  and the relation between incompressibility  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  and pressure), are split into two different steps. On the other hand, the diffusive term is considered in both steps, which allows to enforce the original boundary conditions of the problem in the two steps of the scheme, contrary with the well known projection schemes [?, ?].

We consider a partition  $\{t_n = nk\}$  with  $k = T/N$  of the time interval  $[0, T]$  and a regular triangularization of the domain  $\Omega$  of mesh size  $h$  jointly with a "inf-sup" stable finite element scheme of order at least one.

Starting of the error estimates obtained in [?, ?] and assuming additional regularity hypotheses on the exact solution, the objectives of this work are:

1. To improve the order of error estimate in pressure in norm  $l^2(L^2)$ , from  $O(\sqrt{k} + h/\sqrt{k})$  to  $O(k + h)$ ,
2. To improve the norm of error estimates in velocity and pressure, concretely from  $l^\infty(\mathbf{L}^2)$  to  $l^\infty(\mathbf{H}^1)$  in velocity and from  $l^2(L^2)$  to  $l^\infty(L^2)$  in pressure,
3. To improve the order in space of error estimates in velocity in norm  $L^2(\mathbf{L}^2)$ , from  $O(k + h)$  to  $O(k + h^2)$ ,

Sección en el CEDYA 2007: AN

## Referencias

- [1] J. Blasco. *Thesis*. UPC, Barcelona, Spain (1996).
- [2] J. Blasco, R. Codina. *Error estimates for a viscosity-splitting, finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations*. Appl. Num. Math. **51** (2004) 1-17.
- [3] J. Blasco, R. Codina. *Estimaciones de error para un método de paso fraccionado en elementos finitos para la ecuación de Navier-Stokes incompresible*. Proceedings (in cd-rom) of XVII C.E.D.Y.A. /VII C.M.A. congress (2001).
- [4] J.L. Guermond, L. Quartapelle *On the approximation of the unsteady Navier-Stokes equations by finite elements projection methods* Numer.Math. **80** (1998), 207-238.
- [5] J. Shen. *On error estimates of projection methods for Navier-Stokes equations: first-order schemes*. SIAM Journal Num. Anal. **29** (1992), 57-77.

# Un esquema de alto orden basado en un esquema MUSTA para problemas hiperbólicos no conservativos.

A. PARDO, M.J. CASTRO, C. PARÉS

Depto. de Análisis matemático, U. de Málaga, Spain.

grupo@anamat.cie.uma.es

## Resumen

Presentamos una aproximación multi-etapa MUSTA (Multi-Stage) para la construcción de esquemas numéricos de volúmenes finitos para problemas hiperbólicos no conservativos.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}(W) \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (1)$$

En [1] se presentaron los esquemas MUSTA para leyes de conservación como un resolvidor de Riemann aproximado, basado en un esquema GFORCE y una técnica de tipo predictor-corrector. Los esquemas MUSTA destacan sobre todo por su simplicidad y generalización.

Aquí usamos además el concepto de esquema numérico  $\psi$ -conservativo (path-conservative) tal y como se presenta en [2], concepto que extiende al de esquema conservativo para sistemas de leyes de conservación. Podemos extender así los esquemas de tipo GFORCE al caso no conservativo y después usarlos para generalizar también los esquemas de tipo MUSTA, viendo la técnica predictor-corrector como un operador de reconstrucción.

En particular, se obtienen esquemas MUSTA bien equilibrados para la resolución de sistemas de leyes de conservación acopladas con término fuente:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(W, \sigma) = -B(W, \sigma) \frac{dW}{dx} + \tilde{S}(W, \sigma) \frac{d\sigma}{dx}. \quad (2)$$

En [2] se muestra como podemos conseguir esquemas de alto orden basándonos en un esquema numérico de primer orden y un operador de reconstrucción adecuado. En particular mostramos los esquemas resultantes al usar como esquemas de primer orden el esquema GFORCE y el esquema MUSTA.

Se presenta la implementación numérica realizada para las ecuaciones de aguas someras con variación del fondo. Además se comparan los resultados obtenidos con un método de Roe generalizado (ver [3]) y con otros métodos bien equilibrados.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] E.F. Toro, V.A. Titarev, *MUSTA Schemes for Systems of Conservation Laws*. J. Comput. Phys., 2006 (to appear)
- [2] C. Parés. *Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework*. SINUM (to appear)
- [3] C. Parés, M.J. Castro. *On the well-balance property of Roe's method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to Shallow-Water Systems*. M2AN, Vol. 38, N°5, pp. 821-852, 2004.

# Algunos elementos para la construcción de un Método de Multiescala Variacional “a posteriori”.

ANTONIO DOMÍNGUEZ DELGADO, TOMÁS CHACÓN REBOLLO.

Dpto. de Matemática Aplicada I, Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico.  
Universidad de Sevilla

domdel@us.es, chacon@us.es

## Resumen

El presente trabajo está dedicado a la resolución de problemas de la Mecánica de Fluidos incompresibles en un contexto de convección dominante. Cuando el Método de Galerkin es utilizado para este tipo de problemas, en situaciones de convección dominante, la aproximación numérica obtenida aparece contaminada por oscilaciones espúreas en zonas de fuertes gradientes de la solución.

En principio esta solución oscilatoria parece no tener relación con la solución continua del problema. Sin embargo, el propósito de este trabajo es presentar una técnica de post-proceso de la misma que permite recuperar otra solución no oscilatoria, y que además es una aproximación de segundo orden de la solución continua.

Caracterizamos el método que presentamos como un método de multiescala variacional a posteriori. La idea básica consiste en descomponer la solución Galerkin obtenida en una componente sobre un espacio de escalas “bien resueltas” (componente no oscilatoria) y otra sobre un espacio de escalas “mal resueltas” (componente oscilatoria). En el caso de la ecuación de convección-difusión 1D con coeficientes constantes y Elementos Finitos P1-Lagrange, podemos hacer una elección óptima de ambos espacios en el sentido de que la componente sobre espacio de escalas bien resueltas es la proyección de la solución exacta sobre el mismo.

En el caso evolutivo, es de resaltar que dicho filtrado se realiza solamente en la etapa de tiempo en el que estamos interesados, y no en los anteriores.

Esta técnica multiescala a posteriori se puede extender de manera natural al caso no lineal, proporcionando un método eficaz para la resolución de choques. De nuevo es posible aplicar el filtrado solamente en el instante de tiempo en que estemos interesados, aunque la solución numérica oscile justo hasta ese instante.

El método se ha aplicado al caso de la ecuación de convección-difusión, para la cual se recupera la solución exacta. Asimismo se ha utilizado para aproximar las soluciones de la ecuación de Burgers evolutiva con condiciones iniciales discontinuas y estacionaria con solución discontinua, observándose en ambos casos que el método proporciona soluciones estables y precisas.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] F. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley-Interscience, 1983.
- [2] J. Simon. *Compact sets in  $L_p(0, T; B)$* . Ann. Mat. Pura Appl., sér. IV, CXLVI (1987), 65-96.

# A domain decomposition method derived from the Primal Hybrid Formulations for 2nd order elliptic problems

C. BERNARDI, T. CHACÓN REBOLLO, E. CHACÓN VERA

Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris VI et CNRS  
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla

bernardi@ann.jussieu.fr, chacon@us.es, eliseo@us.es

## Resumen

We introduce a new domain decomposition method obtained when the classical iterative method of Uzawa is applied to the primal hybrid formulation for second order elliptic problems. In this formulation the Lagrange multipliers that enforce the continuity of the approximations across interfaces are expressed via the duality  $H^{-1/2} - H^{1/2}$ , see for instance the works of Raviart-Thomas [5], Roberts-Thomas [6]. Usually, for numerical discretizations, this duality is worked out by means of some projection operator onto the  $L^2$  space on the interfaces, see for instance work of Ben Belgacem [2]. In our approach we use Riesz representation and replace the duality with the  $H^{1/2}$  scalar product that is explicitly computed. As a consequence, we have a formulation in terms of a saddle point problem suitable for iterative techniques, see for instance, the recent survey by Bacuta [1].

The coupling of the different subdomains is performed through the Lagrange multipliers while the coercive form in the formulation does not relate these different subdomains. Therefore, we have observed that the application of Uzawa algorithm yields a domain decomposition method, geometrically convergent with a mesh independent ratio. This property is shared with other well known methods like the Dirichlet-Neumann method proposed by Marini-Quarteroni [4] and the one by Lube-Müller-Otto [3].

The computation of the  $H^{1/2}$  scalar product for the discrete basis functions on the interface is performed once as long as the mesh does not change on it. Comparing this computational work with the accuracy benefit that we obtain we believe it is worthwhile for applications where the interfaces are not complicated. Alternative iteration techniques, like conjugate gradient method and the inexact Uzawa algorithm will be considered in future works. While the augmented Lagrangian method couples different subdomains and therefore does not seem of interest, the study of the conjugate gradient method and the inexact Uzawa algorithm are promising, see Bacuta [1]. Different applications will also be studied in the future.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] Bacuta, C., *A unified approach for Uzawa algorithm* SIAM J. Numer. Anal., Vol. 44, No. 6, pp.-2633-2649, 2006.
- [2] Ben Belgacem, F., *The Mortar finite element method with Lagrange multipliers* Numerische Mathematik, 84:173-197, 1999.
- [3] Lube, G., Müller, L. and Otto, F.C., *A nonoverlapping domain decomposition method for stabilized finite element approximations of the Oseen equations*. J. Comput. Appl. Math., 132 (2): pp 211-236, 2001.
- [4] Marini, L.D. and Quarteroni, A., *A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements* Numerische Mathematik, 55:575-598, 1989.
- [5] Raviart, P.A. and Thomas, J.-M., *Primal Hybrid Finite Element Methods for second order elliptic equations* Math Comp, Vol 31, number 138, pp.- 391-413.
- [6] Roberts, J. E. and Thomas, J.-M., *Mixed and Hybrid Methods* Handbook of Numerical Analysis- Vol 2: Finite Element Methods, P.G. Ciarlet, J.L. Lions editors, North-Holland, Amsterdam.



# KKT-invexidad en optimización vectorial no regular con restricciones de desigualdad.

B. HERNÁNDEZ JIMÉNEZ

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Huelva

beatriz.hernandez@dmat.uhu.es

R. OSUNA GÓMEZ

Dpto. de Estadística e I.O., Univ. de Sevilla

rafaela@us.es

M.A. ROJAS-MEDAR

IMECC-UNICAMP, CP 6065, 13083-859, Campinas-SP, Brazil

marko@ime.unicamp.br

## Resumen

En programación escalar y vectorial, algunas caracterizaciones de soluciones necesitan del concepto de convexidad, tanto si el problema tiene restricciones como si no. Está probado además que el concepto de invexidad es muy importante en el caso en que tengamos funciones diferenciables, y que en algunos casos, esa noción se puede debilitar, dando lugar a la KKT-invexidad. Esto, en problemas con restricciones y funciones diferenciables, ha sido estudiado, tanto en el caso escalar como en el vectorial, para problemas regulares, aquellos cuyas restricciones verifican una cualificación de restricciones.

En este trabajo, generalizaremos los resultados obtenidos por Osuna-Gómez et al. [3] para problemas vectoriales con funciones diferenciables con restricciones de desigualdad, al caso no regular, y será a la vez una generalización de nuestro trabajo [1] en el caso escalar no regular al vectorial.

En el caso escalar no regular, no son aplicables las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker, pero sí las dadas por Izmailov [2]. Definiremos adecuadamente los conceptos análogos a punto de Karush-Kuhn-Tucker, invexidad y KKT-invexidad para el caso vectorial no regular con objeto de generalizar los resultados probados en [3], de caracterización y relaciones entre las soluciones del problema vectorial, los análogos a los puntos de Karush-Kuhn-Tucker, y las soluciones de los problemas escalares ponderados asociados.

**Palabras clave:** Optimización vectorial, no regularidad, KKT-invexidad.

**Sección en el CEDYA 2007:** CO

## Referencias

- [1] Hernández-Jiménez, B., Osuna-Gómez, R., Rojas-Medar, M.A. and Beato-Moreno, A. *Generalized convexity in non-regular scalar programming problems with inequality-type constraints*. Submitted.
- [2] Izmailov, A.F.. *Optimality conditions for degenerate extremun problems with inequality-type constraints*. Comp. Maths Math. Phys., Vol 34, N0 6, 723-736 (1994).
- [3] Osuna Gómez, R.. *Generalized Convexity in Multiobjective Programming*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 233, 205-220, 1999.

# Aproximación de homeomorfismos continuos Hölder por homeomorfismos afines a trozos

JOSÉ CARLOS BELLIDO, CARLOS MORA-CORRAL

J.C.B.: ETSI Industriales, Universidad de Castilla-La Mancha. 13071 Ciudad Real. Spain.  
C.M-C.: Mathematical Institute, University of Oxford. 24–29 St Giles'. Oxford OX1 3LB. United Kingdom.

JoseCarlos.Bellido@uclm.es, mora-cor@maths.ox.ac.uk

## Resumen

En este trabajo se trata el problema de aproximar homeomorfismos por homeomorfismos afines a trozos. La motivación en el contexto de la matemática aplicada viene dada por multitud de situaciones. Citamos por ejemplo las que provienen del contexto de la Elasticidad no Lineal [1]. En esta situación las deformaciones son minimizadores de problemas variacionales planteados sobre el subconjunto de las funciones de un espacio de Sobolev  $W^{1,p}$  que además son invertibles y conservan la orientación (estos son requisitos físicos para que una función sea efectivamente una deformación de un medio elástico, que matemáticamente se traducen en que la función sea un homeomorfismo y que el determinante de su gradiente sea positivo). Si queremos aproximar estos minimizadores o deformaciones por funciones afines a trozos que sean deformaciones discretas aparece el problema de la aproximación de homeomorfismos por homeomorfismos afines a trozos. También en el contexto de los problemas de Cálculo de Variaciones que provienen de la Elasticidad no Lineal, un resultado de aproximación de homeomorfismos de Sobolev por homeomorfismos afines a trozos abriría una vía para establecer la validez de la ecuación de Euler-Lagrange para este tipo de problemas y para extender los resultados de regularidad para minimizadores de problemas variacionales de L.C. Evans al caso de la Elasticidad no Lineal [2].

El método típico de aproximación de funciones por funciones afines a trozos, a saber, elementos finitos  $P_1$ -Lagrange sobre una triangulación regular dada basado en los valores nodales de la función objetivo en los vértices de los triángulos, no es válido cuando tratamos de aproximar un homeomorfismo de Sobolev (no  $C^1$ ) por funciones afines a trozos sobre una triangulación dada que también sean homeomorfismos. Diferentes ejemplos ilustran esta situación. En este sentido para obtener el resultado de aproximación deseado son necesarias nuevas ideas. El principal resultado de nuestra investigación hasta el momento se restringe a funciones continuas Hölder y es el siguiente: cualquier homeomorfismo de exponente  $\alpha \in (0, 1]$  definido en un dominio de  $\mathbf{R}^2$  con frontera poligonal, y cuyo inverso también es continuo Hölder de exponente  $\alpha$ , puede ser aproximado en la norma Hölder de exponente  $\beta$ , con  $\beta < \alpha$  cualquiera, por homeomorfismos afines a trozos sobre triangulaciones. Es importante señalar que la prueba es constructiva, el homeomorfismo afín a trozos lo es sobre una triangulación (no regular en general) que se adapta a la función objetivo y además no coincide con esta función sobre los vértices de los triángulos. La prueba del resultado es técnica y se basa en un resultado clásico de Topología Geométrica [3].

En nuestra comunicación, caso de ser aceptada, nos gustaría tratar los siguientes puntos: la motivación del problema en el contexto antes señalado, por qué el método clásico de valores nodales no funciona, muy brevemente comentar nuestro resultado, y por último nuestro trabajo actual que consiste en tratar de obtener un algoritmo factible de aproximación a partir de nuestra prueba constructiva.

**Sección en el CEDYA 2007:** OTROS TEMAS

## Referencias

- [1] J. M. Ball, *Singularities and computation of minimizers for variational problems*. In “Foundations of computational mathematics (Oxford, 1999)” pages 1–20. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **284**, Cambridge Univ. Press. Cambridge 2001.
- [2] L. C. Evans, Quasiconvexity and partial regularity in the calculus of variations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **95** (1986) 227–252.
- [3] E. E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. Graduate Texts in Mathematics **47**. Springer. New York-Heidelberg 1977.

# Optimal internal stabilization of the linear system of elasticity

FRANCISCO PERIAGO

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística, ETSI Industriales, Univ. Politécnica de Cartagena  
f.periago@upct.es

ARNAUD MÜNCH

Laboratoire de Mathématiques de Besançon, Université de Franche-Comté, France  
arnaud.munch@univ-fcomte.fr

PABLO PEDREGAL

Depto. de Matemáticas, ETSI Industriales, Universidad de Castilla-La Mancha  
pablo.pedregal@uclm.es

## Resumen

We address the nonlinear optimal design problem which consists in finding the best position and shape of the internal viscous damping set for the stabilization of the linear system of elasticity. Precisely, we consider the following nonlinear optimal design problem:

$$(P) \quad \inf_{\omega \in \Omega_L} J(\mathcal{X}_\omega) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (|\mathbf{u}'|^2 + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) dx \quad (1)$$

where for a fixed  $0 < L < 1$ ,

$$\Omega_L = \{\omega \subset \Omega : |\omega| = L |\Omega|\},$$

$|\omega|$  and  $|\Omega|$  being the Lebesgue measure of  $\omega$  and  $\Omega$ , respectively, and  $\mathbf{u}$  is the solution of the elasticity system

$$\begin{cases} \mathbf{u}'' - \nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} + a(x) \mathcal{X}_\omega(x) \mathbf{u}' = 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma_0, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma_1, \\ \mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}'(0, \cdot) = \mathbf{u}_1 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

where  $\mathcal{X}_\omega$  is the characteristic function of  $\omega$ ,  $\nabla_x \cdot$  is the divergence operator considered with respect to the spatial variable  $x$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$  is the outward unit normal vector to  $\Gamma_1$ ,  $0 < T \leq \infty$ , and  $a = a(x) \in L^\infty(\Omega)$  is a damping potential satisfying

$$a(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{a. e. } x \in \omega.$$

Non-existence of classical designs are related to the over-damping phenomenon. Therefore, by means of Young measures, a relaxation of the original problem is obtained. Due to the vector character of the elasticity system, the relaxation is carried out through div-curl Young measures (see [3]) which let the analysis be direct and dimension independent.

The relaxed problem is solved numerically and a penalization technique to recover quasi-optimal classical designs from the relaxed ones is implemented in several numerical experiments. Finally, the influence of the Lamé coefficients is also studied numerically.

The results presented in this work generalize the ones obtained by the authors for the case of the scalar wave equation [1].

For full proofs of the results stated in this work see [2].

**Sección en el CEDYA 2007:** CO

## Referencias

- [1] A. Münch, P. Pedregal and F. Periago, *Optimal design of the damping set for the stabilization of the wave equation*, J. Differential Equations **231** (2006) 331-358.
- [2] A. Münch, P. Pedregal and F. Periago, *Optimal internal stabilization of the linear system of elasticity*, (2007) Preprint available at <http://www.dmae.upct.es/fperiago/>.
- [3] P. Pedregal, *Div-Curl Young measures and optimal design in any dimension*, Revista Mat. Complutense (in press).

# AN OPTIMAL DESIGN PROBLEM IN WAVE PROPAGATION

ALBERTO DONOSO, JOSE CARLOS BELLIDO

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Castilla La Mancha

Alberto.Donoso@uclm.es, JoseCarlos.Bellido@uclm.es

## Resumen

In [4] a structural model was proposed for the design of finite structures made up of two given materials in the context of wave propagation. The model is an optimal design problem in which the distribution of two given materials is optimized so as to minimize a cost functional related to the vibration or propagation of waves along the medium. In practice, this model may be useful for the systematic design of wave filters, damping of waves, or wave guides. The authors develop a numerical method for the optimization of those structures based on topology optimization (see [3]), but there is no mathematical analysis of the model. In the numerical examples, they also observe the surprising fact that no microstructure appears between the two materials when one tries to design a filter or to minimize the vibration energy.

Our aim here is to analyze mathematically the model proposed in [4] in the one-dimensional situation for longitudinal vibration. More specifically, given two materials at our disposal with different Young's modulus and different density, the problem consists of finding the best distributions of the two initial materials in a rod in order to minimize the vibration energy in the structure under periodic loading. It is important to point out that we do not consider any volume constraint in this problem. This fact is in accordance with the physical nature of the problem, since waves propagate better through homogeneous materials than through mixtures of two materials. It is worthwhile to comment that the problem most related to our optimal design problem is the maximization of band gaps. Band gap materials prevent waves of frequencies belonging to a certain interval (the band gap interval) to propagate through the material. This is an optimal design problem in which an unit cell of a infinite periodic medium made up of two (given) materials is found in order to maximize the band gap interval. Rather than this, the aim of our problem is to design a finite structure (instead of a periodic infinite medium) in order to minimize the vibration energy of waves at particular values of the driving frequency.

Up to date, we have proved analytically the existence of classical solutions in certain cases, however, judging by the numerical simulations in [1], we can conjecture that the design problem admits optimal solutions in all of them. We have also dealt with minimizing the vibration energy along a tip-loaded cantilever beam for simple loading as well as multiple loading. Again, in view of the simulations ([2]), we also conjecture the existence of classical solutions for bending waves.

**Sección en el CEDYA 2007:** CO

## Referencias

- [1] J.C. Bellido and A. Donoso, *On an optimal design problem in wave propagation*, Journal of Optimization Theory and Applications, (2007). To appear.
- [2] J.C. Bellido and A. Donoso, *Optimal design in wave propagation with multiple state equations of Bernoulli-Euler type*, (submitted).
- [3] M.P. Bendsøe and O. Sigmund, *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2003.
- [4] O. Sigmund and J.S. Jensen, *Systematic Design of Phononic Band-Gap Materials and Structures by Topology Optimization*, The Royal Society of London, Philosophical Transactions, Series A, Vol. 361, (2003), 65-96.

# Equilibrio de Nash para un problema de control multiobjetivo relacionado con la de depuración de aguas residuales

GARCÍA-CHAN, N., MUÑOZ-SOLA, R.

Dpto. de Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad de Santiago de Compostela, 15706 Santiago.

netog\_g@hotmail.com, rafams@usc.es

VÁZQUEZ-MÉNDEZ, M.E.

Dpto. de Matemática Aplicada, E.P.S., Universidad de Santiago de Compostela, 27002 Lugo.

ernesto@usc.es

## Resumen

El principal objetivo de este trabajo es formular, estudiar y resolver numéricamente un problema de control multiobjetivo relacionado con la gestión de la depuración de un sistema de aguas residuales. Para ello, consideramos un dominio  $\Omega$  ocupado por aguas poco profundas en el que se vierten aguas residuales procedentes de un cierto número de plantas depuradoras. Suponemos que cada depuradora está gestionada por un organismo diferente (ya sean ayuntamientos, industrias, ...) y que tiene a su cargo una serie de zonas *sensibles* (playas, zonas de marisqueo, ...) en las que debe garantizar niveles de contaminación inferiores a unos valores máximos prefijados (en caso contrario, la planta deberá hacer frente a una multa cuya cuantía es una función creciente del “exceso” de contaminación en la zona). Admitimos que el gestor de cada planta tiene como objetivo buscar una estrategia de depuración que minimize costes (suma del gasto propio del proceso de depuración y de la cuantía de las multas) y transformamos el problema en encontrar un equilibrio de Nash para el siguiente problema de control multiobjetivo:

Para  $j = 1, \dots, N_E$ , encontrar los controles  $m_j \in M_j = \{m \in L^\infty(0, T); 0 < \underline{m}_j \leq m(t) \leq \bar{m}_j, \text{ c.p.d. en } (0, T)\}$  que minimicen los funcionales

$$J_j(m_1, m_2, \dots, m_{N_E}) = \int_0^T f_j(m_j(t)) dt + \sum_{i=n_{(j-1)}+1}^{n_j} \frac{1}{\epsilon_i} \int_{\bar{A}_i \times (0, T)} \psi(\rho(x, t) - \sigma_i) dx dt \quad (1)$$

donde  $\rho(x, t)$  es la solución de

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho - \beta \Delta \rho + \kappa \rho &= \frac{1}{h} \left[ \sum_{j=1}^{N_E} m_j(t) \delta(x - P_j) \right] && \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x) && \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \rho}{\partial n} &= 0 && \text{en } \partial \Omega \times (0, T) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

y la función  $\psi$  es una regularización de la función  $y \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}(\max(y, 0))^2$ .

Un problema similar a este, pero con un único funcional a minimizar, ya fue estudiado en [1] como un problema de control óptimo con restricciones puntuales sobre el estado y sobre el control. En este trabajo analizaremos rigurosamente el problema de control multiobjetivo y probaremos la existencia de un equilibrio de Nash. De modo similar a como se hace en [2], introduciremos formalmente el *estado adjunto* del problema y estableceremos un sistema de optimalidad de primer orden que caracterice a los equilibrios de Nash. Finalmente, propondremos un algoritmo numérico para resolver el problema y presentaremos los resultados numéricos obtenidos en una situación realista planteada en la ría de Vigo.

**Sección en el CEDYA 2007:** CO

## Referencias

- [1] A. Martínez, C. Rodríguez, M. E. Vázquez-Méndez. *Theoretical and numerical analysis of an control problem related to wastewater treatment*. SIAM J. Control Optim, Vol. 38, No. 5 (2000), 1534-1553.
- [2] A. M. Ramos, R. Glowinski y J. Periaux. *Nash equilibria for the multiobjective control of linear partial differential equations*. Journal of optimization theory and applications, Vol. 112, No. 3 (2002), 457-498.

# Relajación de problemas de control en los coeficientes con un funcional dependiendo del gradiente

J. CASADO DÍAZ, J. COUCE CALVO, J.D. MARTÍN GÓMEZ

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla

jasadod@us.es, couce@us.es, jdmartin@us.es

## Resumen

Se considera un problema de diseño óptimo consistente en obtener la mezcla de dos materiales anisotrópicos (eléctricos o térmicos) que minimice un funcional coste dependiente del gradiente del estado. Denotando por  $A, B$  las matrices de difusión que caracterizan a ambos materiales, el problema modelo que estudiamos se escribe como

$$\begin{cases} \inf \left\{ \int_{\Omega} F(\nabla u) dx + G(u) \right\} \\ -\operatorname{div} (A\chi_{\omega} + B\chi_{\Omega \setminus \omega}) \nabla u = f \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \\ \omega \subset \Omega \text{ medible, } |\omega| = s, \end{cases}$$

donde  $G$  es un funcional secuencialmente continuo en la topología débil de  $H^1$ . Es bien conocido ([3]) que este tipo de problemas no admite solución en general y de ahí la necesidad de realizar una relajación (ver por ejemplo [4], [5]). En el caso en que  $F$  es nula, es clásico que esta relajación se obtiene reemplazando el conjunto de diseños admisibles por el conjunto de materiales obtenidos mediante homogeneización. En nuestro caso ( $F$  no necesariamente nula) mostramos que ésto también es así pero además la extensión del funcional a los nuevos materiales no es inmediata sino que admite una expresión integral del tipo

$$\int_{\Omega} H(\nabla u, M\nabla u, \theta) dx + G(u),$$

donde  $M$  representa el material homogeneizado y  $\theta$  la proporción de material  $A$  usada en la mezcla. Probamos además que nuestro resultado permite obtener una nueva demostración de algunos resultados obtenidos previamente por otros autores ([1], [2]) para el caso de materiales isótropos y  $F(\nabla u) = |\nabla u|^2$ .

**Sección en el CEDYA 2007:** CO

## Referencias

- [1] J.C. Bellido, P. Pedregal *Explicit quasiconvexification for some cost functionals depending on derivatives of the state in optimal designing*. *Discr. Contin. Dyn. Syst.* 8, 4 (2002), 967-982.
- [2] Y. Grabovsky. *Optimal design for two-phase conducting composites with weakly discontinuous objective functionals*. *Adv. Appl. Math.* 27 (2001), 683-704.
- [3] F. Murat. *Théorèmes de non existence pour des problèmes de contrôle dans les coefficients*. *C.R.A.S Sci. Paris A* 274 (1972), 395-398.
- [4] F. Murat, L. Tartar. *Calculus of variations and homogenization*. En *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials*, ed. L. Cherkaev, R.V. Kohn. *Progress in Nonlinear Diff. Equ. and their Appl.*, 31, Birkhäuser, Boston, 1998, 139-173.
- [5] L. Tartar. *Remarks on optimal design problems*. En *Calculus of variations, homogenization and continuum mechanics*, ed. G. Buttazzo, G. Bouchitte, P. Suquet. *Advances in Math. for Appl Sci*, 18, World Scientific, Singapore, 1994, 279-296.

# Optimal control problem for the generalized bioconvective flow

MARKO A. ROJAS-MEDAR\*

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Estadual de Campinas, CP 6065, 13083-859, Campinas-SP,  
Brazil

marko@ime.unicamp.br

ROGERIO DE AGUIAR

DMAT, UDESC-Joinville, Campus Avelino Marcante S/N 89223100, Joinville-SC, Brazil

dma2ra@joinville.udesc.br

JAIME ORTEGA<sup>†</sup>

Universidad del Bío-Bío Facultad de Ciencias, Departamento de Ciencias Básicas, Campus  
Fernando May, Casilla 447, Chillán, Chile and U. de Chile, Centro de Modelamiento Matemático,  
UMI 2807 CNRS-UdeChile, Casilla 170-3, Correo 3, Santiago, Chile

jortega@dim.uchile.cl

MARIA DRINA ROJAS-MEDAR<sup>‡</sup>

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Antofagasta, Casilla 170, Antofagasta-Chile

mrojas@uantof.cl

## Resumen

We consider an optimal control problem for the generalized bioconvective flow, which is a well known model to describe the convection caused by the concentration of upward swimming microorganisms in a fluid. Firstly, we study the existence and uniqueness of weak solutions for this model, moreover we prove the existence of the optimal control and we establish the minimum principle by using Dubovitskii-Milyutin's formalism.

**Sección en el CEDYA 2007:** Control y Optimización

## Referencias

- [1] Căpătină A., Stavre R. (1998), *A control problem in bioconvective flow*. J. Math. Kyoto Univ. **37** (4), 585-595.
- [2] Girsanov I.V. (1972), *Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **67**, Springer- Verlag, Berlin.
- [3] Kan-On Y., Narukawa K., Teramoto Y. (1992), *On the equations of bioconvective flow*. J. Math. Kyoto Univ. **32** (1), 135-153.
- [4] Levandowsky M., Hunter W.S., Spiegel E.A. (1975), *A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms*, J. Protozoology **22**, 296-306.
- [5] Rojas-Medar M.D. (1998), *Alguns resultados sobre uma generalização das equações de fluxo bioconvectivo*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP.

---

\* CGCI MECD-DGU Brazil/Spain Grant 117/06.

<sup>†</sup>Partially supported by Grant FONDECYT 1030943.

<sup>‡</sup>Supported by Research Grant PEI N<sup>o</sup> 1320, Universidad de Antofagasta-Chile

# Null controllability results for parabolic equations in unbounded domains

M. GONZÁLEZ-BURGOS

Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla

manoloburgos@us.es

L. DE TERESA

Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México

deteresa@matem.unam.mx

## Resumen

In this talk we present some results concerning the null controllability of the system

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + B \cdot \nabla y + ay = v1_\omega & \text{in } Q = \Omega \times (0, T), \\ y = 0 & \text{on } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T), \quad y(x, 0) = y_0(x) & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

posed in an **unbounded** domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . In (1),  $1_\omega$  denotes the characteristic function of the subset  $\omega \subset \Omega$ ;  $B \in L^\infty(Q)^N$ ,  $a \in L^\infty(Q)$  and  $y^0 \in L^2(\Omega)$  are given,  $y = y(x, t)$  is the state and  $v = v(x, t)$  is the control function (which acts on the system through the subset  $\omega$ ). It is by now well known that (1) is, in general, not null controllable at time  $T > 0$  (see [4, 5, 6]).

We first present a global Carleman inequality for the adjoint problem (and then, a positive null controllability result for system (1)) under appropriate assumptions on  $\Omega$  and  $\omega$ . We also give some examples of unbounded domains  $(\Omega, \omega)$  that satisfy these sufficient conditions. As a consequence, we will be able to prove the results of [1], [2] and [6] about the null controllability in  $L^2(\Omega)$  of system (1) when  $a \in L^\infty(Q)$  and  $B \in L^\infty(Q)^N$ .

Secondly, we will analyze the controllability properties of system

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + f(y, \nabla y) = v1_\omega & \text{in } Q, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma, \quad y(x, 0) = y_0(x) & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

when  $\Omega$  is an unbounded domain,  $\Omega \setminus \omega$  is a bounded set and the nonlinearity  $f(y, \nabla y)$  grows slower than  $|y| \log^{3/2}(1 + |y| + |\nabla y|) + |\nabla y| \log^{1/2}(1 + |y| + |\nabla y|)$  at infinity (generally in this case in the absence of control, blow up occurs). We will obtain the result on null controllability for system (2) stated in [3] for **bounded domains**  $\Omega$  and, in particular, we will generalize the result on null controllability stated in [1] for globally Lipschitz-continuous functions  $f$ .

**Sección en el CEDYA 2007:** CO

## Referencias

- [1] V.R. Cabanillas, S.B. De Menezes, E. Zuazua, *Null controllability in unbounded domains for the semilinear heat equation with nonlinearities involving gradient terms*, J. Optim. Theory Appl. 110 (2001), no. 2, pp. 245–264.
- [2] P. Cannarsa, P. Martinez, J. Vancostenoble, *Null controllability of the heat equation in unbounded domains by a finite measure control region*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 10 (2004), no. 3, pp. 381–408.
- [3] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, E. Zuazua, *On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient*, SIAM J. Control Optim. 41 (2002), no. 3, pp. 798–819.
- [4] S. Micu, E. Zuazua, *On the lack of null-controllability of the heat equation on the half-line*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), no. 4, pp. 1635–1659.
- [5] S. Micu, E. Zuazua, *On the lack of null-controllability of the heat equation on the half space*, Port. Math. (N.S.) 58 (2001), no. 1, pp. 1–24.
- [6] L. Miller, *On the null-controllability of the heat equation in unbounded domains*, Bull. Sci. Math. 129 (2005), no. 2, pp. 175–185.



# Control de EDPs orientado a la terapia de un tumor cerebral

R. ECHEVARRÍA, A. DOUBOVA, E. FERNÁNDEZ-CARA, I. GAYTE-DELGADO

Dpto. E.D.A.N., Univ. de Sevilla

doubova@us.es, rel@us.es, cara@us.es, gayte@us.es

## Resumen

Consideramos un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que modela la acción de una terapia sobre un tumor cerebral (glioblastoma). La densidad de células tumorales verifica una EDP parabólica semilineal, que está acoplada con otra EDP similar para una sustancia terapéutica. El control está soportado en una pequeña parte arbitraria del dominio que ocupa el tumor y actúa a través del segundo miembro de la ecuación para la terapia. Un modelo más simple de crecimiento del tumor cerebral y sin la acción de terapia fue considerado en [1].

Presentamos resultados de control para este modelo, así como algunas simulaciones numéricas.

**Sección en el CEDYA 2007:** Co

## Referencias

- [1] K. R. Swanson, E. C. Alvord Jr, and J. D. Murray, *A quantitative model for differential motility of gliomas in grey and white matter*, Cell Prolif., 33, 317–329, 2000.



# COMUNICACIONES

*Martes 25*



## CEDYA 2007

### Standing Waves of Some Coupled Nonlinear Schrödinger Equations

E. COLORADO

Department of Mathematical Analysis, University of Granada, Granada 18071 (SPAIN)

colorado@ugr.es

A. AMBROSETTI

International School for Advanced Studies (ISAS/SISSA), Trieste 34014 (ITALY)

ambr@sissa.it

### Resumen

In spite of the interest that system of coupled NLS (Nonlinear Schrödinger) equations have in Nonlinear Optics, see e.g. [1], only few rigorous general results have been proved so far. Here, motivated by the recent paper [5], we deal with the system

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^3 + \beta uv^2, & u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ -\Delta v + \lambda_2 v = \mu_2 v^3 + \beta u^2 v, & v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (1)$$

where  $\lambda_i, \mu_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\beta$  is a real parameter and  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ .

We prove the existence of *bound* and *ground states* provided the coupling parameter  $\beta < \Lambda$ , respectively,  $\beta > \Lambda'$ , where  $0 < \Lambda \leq \Lambda' < \infty$ . The main results are the following.

**Theorem 1.** If  $\beta > \Lambda'$  then (1) has a (positive) radial ground state  $\tilde{\mathbf{u}}$ .

**Theorem 2.** If  $\beta < \Lambda$ , then (1) has a radial bound state  $\mathbf{u}^*$  such that  $\mathbf{u}^* \neq \mathbf{u}_j$ ,  $j = 1, 2$ , where  $\mathbf{u}_1 = (U_1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, U_2)$  and  $U_j$  is the positive radial solution to  $-\Delta U_j + \lambda_j U_j = \mu_j U_j^3$ . Furthermore, if  $\beta \in (0, \Lambda)$ , then  $\mathbf{u}^* > 0$ .

The main idea in the proof of Theorems 1, 2 is to show that the Morse index of  $\mathbf{u}_1$  and  $\mathbf{u}_2$  changes with  $\beta$ :

- for  $\beta < \Lambda$  small their index is 1,
- while for  $\beta > \Lambda'$  their index is greater or equal than 2.

This fact, jointly with an appropriate use of the *natural constraint method*, allow us to prove the existence of bound and ground states.

These results are announced in [2] and proved in [3].

Other results dealing with multi-bump solutions to linearly coupled systems of nonlinear Schrödinger equations will be commented at the end of the talk. See [4] for more details.

**Sección en el CEDYA 2007:** Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP).

### Referencias

- [1] N. Akhmediev & A. Ankiewicz, *Solitons, nonlinear pulses and beams*, Chapman & Hall, London, 1997.
- [2] A. Ambrosetti & E. Colorado, *Bound and ground states of coupled nonlinear Schrödinger equations*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **342** (2006), no. 2, 453-458.
- [3] A. Ambrosetti & E. Colorado, *standing Waves of Some Coupled Nonlinear Schrödinger Equations*. To appear in Journal of the London Mathematical Society (2007).
- [4] A. Ambrosetti, E. Colorado & D. Ruiz, *Multi-bump solutions to linearly coupled systems of Nonlinear Schrödinger equations*. To appear in Calculus of Variations and PDE (2007).
- [5] T-C. Lin & J. Wei, *Ground state of N coupled nonlinear Schrödinger equations in  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \leq 3$* . Comm. Math. Phys. **255** (2005), 629-653.

# Puntos de retroceso y soluciones resonantes en ramas no acotadas de soluciones

ROSA PARDO, JOSE ARRIETA, ANIBAL RODRIGUEZ-BERNAL

Depto. de Matemática Aplicada, Univ. Complutense de Madrid, Madrid 28040, Spain

rpardo@mat.ucm.es, arrieta@mat.ucm.es, arober@mat.ucm.es

## Resumen

Consideramos el siguiente problema parabólico  $u_t - \Delta u + u = 0$  con una condición de frontera no lineal dependiendo de un parámetro del tipo  $\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u + g(\lambda, x, u)$  de forma que  $\frac{g(\lambda, x, u)}{u} \rightarrow 0$  cuando  $|u| \rightarrow \infty$ . En [2, 3] demostramos que este tipo de problemas admite ramas de soluciones  $(\lambda, u_\lambda)$  que no están acotadas cuando  $\lambda$  converge hacia un autovalor de Steklov. Este fenómeno se conoce como bifurcación desde infinito, ver [7].

Una solución  $(\lambda^*, u^*)$  en una rama de soluciones es un **punto de retroceso** si no hay soluciones  $(\lambda, u_\lambda) \approx (\lambda^*, u^*)$  para  $\lambda > \lambda^*$ , (o bien no hay soluciones próximas para  $\lambda < \lambda^*$ ). Estos puntos de retroceso están siempre relacionados con la multiplicidad de soluciones y, eventualmente, con sus cambios de estabilidad. En ramas de soluciones que no son a priori ni subcríticas (a la izquierda del autovalor) ni supercríticas (a la derecha), establecemos condiciones suficientes para que exista una sucesión de infinitos puntos de retroceso. Consideremos análogamente ramas de soluciones que no son a priori ni estables ni inestables. Establecemos condiciones suficientes para que exista una sucesión de infinitos puntos de retroceso *simples* (en los que la solución cambia de estable a inestable). Además, en ambos casos la sucesión de puntos de retroceso converge al punto de bifurcación desde infinito y, en consecuencia, existen **infinitas soluciones del problema resonante**.

En [2, 3] establecimos condiciones suficientes para que las ramas de soluciones sean subcríticas o supercríticas y estudiamos asimismo el principio del anti-máximo, ver [5] y condiciones del tipo Landesman y Lazer para algunos problemas resonantes, aquellos en los que el parámetro coincide con el autovalor, ver [6]. Existen resultados en la literatura para problemas elípticos con la no linealidad actuando en el interior del dominio y con condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas, ver [1]. En este caso, los autovalores del problema de Dirichlet juegan el papel determinante. En [2, 4] establecimos condiciones suficientes para garantizar la estabilidad de dichas ramas no acotadas de soluciones. Además suponiendo que la no-linealidad es diferenciable con respecto del parámetro, obtuvimos en [4] condiciones suficientes para garantizar la monotonía con respecto del parámetro. En consecuencia, la solución positiva es única bajo ciertas condiciones, para valores de  $\lambda$  suficientemente próximos al autovalor de Steklov. Las condiciones de Landesman y Lazer para la existencia de soluciones de equilibrio en los casos resonantes establecen que, si la bifurcación desde infinito es subcrítica (o supercrítica), entonces el problema resonante tiene solución. Es por tanto interesante centrarse en el estudio de ramas que no son a priori *ni subcríticas ni supercríticas* y analizar su comportamiento en un entorno del punto de bifurcación desde infinito. Las funciones  $g$  oscilatorias son ejemplos arquetipo.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] D. Arcoya & J.L. Gámez, *Bifurcation Teoría and Related Problems: Anti-Maximum Principle and Resonance*, Comm. P.D.E., Vol. 5, N. 4, 557-569, (2001).
- [2] J. M. Arrieta, R. Pardo y A. Rodríguez-Bernal, *Bifurcation and stability of equilibria with asymptotically linear boundary conditions at infinity*. Proc. Roy. Soc. Edinburg, Vol.137 A, 1-28, (2007).
- [3] J. M. Arrieta, R. Pardo y A. Rodríguez-Bernal, *Problemas elípticos con condiciones de contorno asintóticamente lineales en infinito*. Proceedings of the XVIII Congress on Differential Equations y Aplicaciones/VIII Congress on Applied Mathematics (Spanish) (Tarragona, 2003).
- [4] J. M. Arrieta, R. Pardo y A. Rodríguez-Bernal, *Sobre la estabilidad y la monotonía de ramas de soluciones no acotadas de problemas elípticos con condiciones de frontera asintóticamente lineales*. Proceedings of the XIX CEDYA, IX Congreso de Matemática Aplicada (Spanish), ISBN: 84-689-7726-8, (Madrid, 2005)
- [5] P. Clement and L.A. Peletier, *An anti-maximum principle for second order elliptic operators*, J. Diff. Eq., Vol. 34, 218-229, (1979).
- [6] E.M. Landesman and A.C. Lazer, *Nonlinear Perturbations of linear elliptic problems at resonance*, J. Math. Mech., Vol. 19, 609-623, (1970).
- [7] P. H. Rabinowitz, "On Bifurcation From Infinity", *J. Differential Equations*, Vol. 14, 462-475, (1973).

# Perturbación y decaimiento en ecuaciones parabólicas no autónomas

A. RODRÍGUEZ-BERNAL

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Complutense de Madrid

arober@mat.ucm.es

<http://www.mat.ucm.es/~arober>

## Resumen

En esta comunicación presentamos algunos resultados referentes al problema de determinar la forma y el tamaño mínimo de la perturbación, necesario para conseguir el decaimiento exponencial de las soluciones de una ecuación parabólica no autónoma.

En otros términos, el problema consiste en determinar condiciones sobre la forma y el tamaño de una familia de potenciales, dependientes del tiempo, de manera que la ecuación perturbada con estos potenciales, modifique su tipo exponencial, con respecto a la ecuación no perturbada.

Este tipo de resultados en particular permite dar condiciones suficientes para que una solución no estacionaria de una ecuación parabólica (autónoma o no) sea linealmente estable.

De esto es posible deducir propiedades de estabilidad asintótica exponencial de soluciones no estacionarias de problemas parabólicos no autónomos y mejorar algunos resultados conocidos, e.g. en [1] y [4].

Este tipo de resultados también tiene aplicaciones a los sistemas lineales y no lineales de ecuaciones parabólicas no autónomas.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] J. A. Langa, J. C. Robinson, and A. Suárez. *Bifurcation from zero of a complete trajectory for nonautonomous logistic PDEs*. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 15(8):2663–2669, 2005.
- [2] J.C. Robinson, A. Rodríguez-Bernal, and A. Vidal-López. *Pullback attractors and extremal complete trajectories for non-autonomous reaction-diffusion problems*. Departamento de Matemática Aplicada, UCM, Preprint Series MA-UCM-2005-23.
- [3] A. Rodríguez-Bernal. *On linear and nonlinear non-autonomous parabolic equations*. Departamento de Matemática Aplicada, UCM, Preprint Series MA-UCM-2006-15.
- [4] A. Rodríguez-Bernal and A. Vidal-López. *Existence, uniqueness and attractivity properties of positive complete trajectories for non-autonomous reaction-diffusion problems*. To appear in *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Serie A*, 2007. Departamento de Matemática Aplicada U. Complutense, Preprint Series MA-UCM 2006-07.

# Lie Symmetries, qualitative analysis and exact solutions of nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities

JUAN BELMONTE BEITIA, VÍCTOR M. PÉREZ GARCÍA, VADYM VEKSLERCHIK

Dpto. de Matemáticas, E.T.S.I. Industriales, and Instituto de Matemática Aplicada a la Ciencia y la Ingeniería (IMACI) Universidad de Castilla-La Mancha 13071 Ciudad Real, Spain

juan.belmonte@uclm.es, victor.perezgarcia@uclm.es, vadym@ind-cr.uclm.es

PEDRO J. TORRES

Dpto. de Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias. Universidad de Granada. Campus de Fuentenueva s/n, 18071 Granada, Spain

ptorres@ugr.es

## Resumen

Usando teoría de grupos de Lie y transformaciones canónicas, construimos soluciones analíticas de la ecuación de Schrödinger no lineal con no linealidad espacialmente inhomogénea. En esta comunicación presentamos la teoría general, usamos esta para mostrar diferentes casos y ejemplos que surgen en este contexto y usamos la teoría cualitativa de sistemas dinámicos para mostrar las propiedades y comportamientos de estas soluciones. Finalmente, calcularemos soluciones asimétricas explícitas de la ecuación de Schrödinger no lineal inhomogénea (INLSE).

**Sección en el CEDYA 2007:** Mathematical Physics

## Referencias

- [1] J. Belmonte-Beitia, V. M. Pérez-García, Vadym Vekslerchik and P. J. Torres. Lie symmetries and solitons in nonlinear systems with spatially inhomogeneous nonlinearities. *Phys. Rev. Lett.* **nlin.PS/0611051**.
- [2] G. W. Bluman and S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Springer Verlag, New York (1989).
- [3] P. J. Olver *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer (1993).
- [4] P. G. L. Leach, *J. Math. Phys.* **22**, 3 (1981).



# Connecting steady states of a diffusive energy balance climate model via controllability results

V. GARCÍA, J.I. DÍAZ

Dpto. de Matemática Aplicada  
Universidad Complutense de Madrid

victor.garcia.garrido@estumail.ucm.es and diaz.racefyn@insde.es

## Resumen

In this communication we consider a simple Budyko-Sellers model of the type

$$(P) \begin{cases} y_t - (k(1-x^2)y_x)_x = R_a(y) - R_e(y, u) & x \in (-1, 1), t > 0, \\ y(x, 0) = y_0(x) & x \in (-1, 1), \end{cases}$$

where  $k > 0$ ,  $R_a(y)$  is a bounded increasing function (the absorbed energy due to the co-albedo) and  $R_e(y, u)$  is a strictly increasing function of the type  $R_e(y, u) = u|y|^3 y$  coming from the Stefan-Boltzman radiation law with an emissivity  $u$  which, varying in some positive interval, is taken here as a control variable (indicating the anthropogenerated actions on the rate of emissions on the greenhouse gases). It is well known (Hetzer (1990), Arcoya, Díaz and Tello (1998)) that the set of stationary solutions is very large (depending on the parameter  $u$ ) and, for instance, it leads to a bifurcation diagram with a principal branch which is  $S$ -shaped containing at least one turning point to the right and another one to the left.

We consider the problem of transferring the system (through some sufficiently large time  $T$ ) from a stationary state to another one in the same connected component. For instance, from an unstable state  $(y_0(x), u_0)$  to a final stable one  $(y_f(x), u_0)$  (near a turning point) of the principal branch. We are interested here in the case of possible localized controls of the form  $u(t, x)\chi_{(l_1, l_2)}$ , for some given latitude control interval  $(l_1, l_2) \subset (-1, 1)$ . We show that, at least, the transfer can be reached in a weak way (arriving as close as wished, in the  $L^2$  norm, to the stable state). We also show that the transfer is exactly to the stable state by assuming some additional conditions. One of the main mathematical difficulties comes from the coupling term control/state  $u|y|^3 y$  (in contrast with other previous control formulations).

**Sección en el CEDYA 2007:** Control

# Comportamiento asintótico del modelo $\alpha$ -Navier-Stokes 3D con retardos

TOMÁS CARABALLO, ANTONIO M. MÁRQUEZ, JOSÉ REAL  
Depto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, U. de Sevilla  
caraball@us.es, ammarquez@us.es, jreal@us.es

## Resumen

El modelo  $\alpha$ -Navier-Stokes (modelo LANS- $\alpha$  o ecuaciones viscosas de Camassa-Holm)

$$\begin{cases} \partial_t(u - \alpha \Delta u) + \nu(Au - \alpha \Delta(Au)) + (u \cdot \nabla)(u - \alpha \Delta u) \\ -\alpha \nabla u^* \cdot \Delta u + \nabla p = f, \text{ en } \mathcal{O} \times (\tau, +\infty), \\ \nabla \cdot u = 0, \text{ en } \mathcal{O} \times (\tau, +\infty), \\ u = 0, \quad Au = 0, \text{ sobre } \partial \mathcal{O} \times (\tau, +\infty), \\ u(\tau) = u^0, \text{ en } \mathcal{O}, \end{cases} \quad (1)$$

ha recibido mucha atención en los últimos años. Las razones principales radican en que este modelo ha resultado muy útil para aproximar las ecuaciones de Navier-Stokes, y además se ha revelado como un marco adecuado para el estudio de uno de los problemas de más interés en dinámica de fluidos, modelizar el movimiento de fluidos turbulentos (véase, por ejemplo, Foias et al. [5] y Holm et al. [6]).

Para la versión tridimensional en dominios acotados se conocen resultados de existencia y unicidad de solución para el caso determinista autónomo (véase [4]), para el caso determinista no autónomo conteniendo retardos (véase [2]) y para el caso estocástico con retardos (véase [1]).

En cuanto al comportamiento asintótico de las soluciones de este modelo, para su versión determinista, Coutand et al. demuestran en [4], para el caso autónomo, la existencia del atractor global para las mismas y el carácter finito de su dimensión fractal. Para la versión estocástica de este modelo, hemos establecido en [3] hipótesis suficientes que aseguran la existencia y unicidad de soluciones estacionarias, y estudiado algunas propiedades de estabilidad de dicho modelo. Además, hemos analizado los efectos producidos por perturbaciones estocásticas en la versión determinista del sistema, comprobando si se produce algún cambio en el comportamiento de las soluciones del mismo, en relación a su estabilidad.

En [2] demostramos la existencia de un atractor en sentido pullback (y, eventualmente, la del atractor forward uniforme) para el caso no autónomo con retardos. En nuestro último trabajo nos hemos interesado por el comportamiento asintótico del modelo  $\alpha$ -Navier-Stokes 3D, en el caso en que aparecen perturbaciones que contienen efectos de memoria en el sistema (retardos). Nuestro objetivo es exponer en esta comunicación algunos de los resultados conseguidos en este sentido. En concreto, probaremos, en primer lugar, un resultado que asegura la existencia de soluciones estacionarias para nuestro modelo abstracto cuando el término que contiene el retardo tiene una forma especial, y siempre que la viscosidad sea suficientemente grande. Entonces, demostraremos que cuando la solución estacionaria es única, todas las soluciones de nuestro problema convergen exponencialmente a esta última. Este resultado requiere una hipótesis fuerte sobre la función retardo, hipótesis que debilitaremos usando una aproximación diferente, a saber, un argumento tipo Razumikhin [7].

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] T. Caraballo, A. M. Márquez-Durán & J. Real, On the stochastic 3D-Lagrangian averaged Navier-Stokes  $\alpha$ -model with finite delay, *Stochastics and Dynamics*, Vol. 5, Núm. 2 (2005) 189-200.
- [2] T. Caraballo, A. M. Márquez-Durán & J. Real, Pullback and forward attractors for a 3D LANS- $\alpha$  model with delay, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Vol. 15, Núm. 2 (2006), Pág. 559-578.
- [3] T. Caraballo, A.M. Márquez-Durán and J. Real, On the asymptotic behaviour of a stochastic 3D LANS- $\alpha$  model, *Applied Mathematics and Optimization*, 53 Núm. 2 (2006), 141-161, New York.
- [4] D. Coutand, J. Peirce & S. Shkoller, Global well-posedness of weak solutions for the Lagrangian averaged Navier-Stokes equations on bounded domains, *Comm. on Pure and Appl. Anal.* 1, Núm.1, (2002), 35-50.
- [5] C. Foias, D.D. Holm & E.S. Titi, The three dimensional viscous Camassa-Holm equations and their relation to the Navier-Stokes equations and turbulence theory, *J. Dyn. Diff. Eq.* 14, 1 (2002), 1-35.
- [6] D.D. Holm, C. Jeffery, S. Kurien, D. Livescu, M.A. Taylor & B.A. Wingate, The LANS- $\alpha$  Model for Computing Turbulence. Origins, Results and Open Problems, *Los Alamos Science*, 29 (2005), 152-171.
- [7] B.S. Razumikhin, On stability of systems with a delay. *Prikl. Mat. Mech.*, 20 (1956), 500-512.

# Existencia y unicidad de soluciones fuertes para las ecuaciones de los fluidos micropolares en dominios de $R^3$

JOSÉ LUIZ BOLDRINI, MARKO A. ROJAS-MEDAR

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Univ. Estadual de Campinas  
boldrini@ime.unicamp.br, marko@ime.unicamp.br

MARIO DURÁN

Facultad de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile  
mduran@ing.puc.cl

## Resumen

Vamos a considerar el problema de valores iniciales y de contorno para el sistema de ecuaciones que describe el movimiento de fluidos incompresibles micropolares en un dominio  $\Omega$  de  $R^3$ . Bajo algunas hipótesis, similares a las de las ecuaciones de Navier-Stokes equations, probaremos la existencia y unicidad de soluciones fuertes en  $L_p(\Omega)$ ,  $\forall p > 3$ .

**Palabras clave:** Fluido Micropolar, dominios no acotados, hidrodinámica.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Agradecimientos

Los dos primeros autores han sido parcialmente financiados por BFM2003-06446-C02-01, Ministerio de Ciencia y Tecnología de España y Cooperación Internacional Brasil-España, financiado por CAPES y Ministerio de Educación de España, proyecto Nro. 2137-05-4.

## Referencias

- [1] D.W. Condiff, J.S. Dahler, Fluid mechanics aspects of antisymmetric stress, *Phys. Fluids*, 11, (1964), 842-854.
- [2] M. Durán, E. Ortega-Torres, M. Rojas-Medar, Stationary solutions of magneto-micropolar fluids equations in exterior domains. *Proyecciones* 22 (2003), no. 1, 63-79.
- [3] M. Durán, J. Ferreira, M. Rojas-Medar, Reproductive Weak Solutions of Magneto-Micropolar Fluid Equations in Exterior Domains, *Mathematical and Computer Modelling*, 35, (2002), 779-791.
- [4] A.C. Eringen, Theory of micropolar fluids, *J.Math. Mech.*, 16, (1966), 1-8.
- [5] A.C. Eringen, Simple microfluids, *Int. J. Enging. Sci.*, 2, (1964), 205-217.
- [6] O. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, second edition, Gordon and Breach Eds., New York (1969).
- [7] O. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, *Transl. Math. Monographs*, Amer. Math. Soc, 23, (1968).
- [8] G. Lukaszewicz, *Micropolar Fluids: Theory and Applications*, Birkhäuser, Berlin (1998).
- [9] E. Ortega-Torres, M. Rojas-Medar, Magneto-micropolar fluid motion: global existence of strong solutions, *Abstract Applied Analysis*, 4 (2), (1999), 109-125.
- [10] E. Ortega-Torres, M. Rojas-Medar, On the uniqueness and regularity of the weak solutions for magneto-micropolar equations, *Rev. Mat. Apl.*, 17, (1996), 75-90.
- [11] L. Petrosyan, *Some Problems of Fluids Mechanics with Antisymmetric Stress Tensor*, Erevan (1984) (in Russian).
- [12] A.J. Reséndiz, M. Rojas-Medar, Existence of weak solution of micropolar fluid equations in a time dependent domain, *Rev. Mat. Apl.*, 23, (2002), 27-46.
- [13] M. Rojas-Medar, J.L. Boldrini, Magneto-micropolar fluid motion: existence of weak solution, *Rev. Mat. Univ. Complutense de Madrid*, 11 (2), (1998), 443-460.
- [14] M. Rojas-Medar, Magneto-micropolar fluid motion: existence and uniqueness of strong solution, *Math. Nachr.*, 188, (1997), 301-319.
- [15] M.A. Rojas-Medar, E.E. Ortega-Torres, E. E., The equations of a viscous asymmetric fluid: an interactive approach. *Z. Angew. Math. Mech.* 85 (2005), no. 7, 471-489.
- [16] V.A. Solonnikov, On the boundary-value problems for linear parabolic system of differential equations of general form, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 83, (1965), 1-162.
- [17] V.A. Solonnikov, Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes equations, *Zap. Načn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOM)*, 38, (1973) 153-231.
- [18] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North - Holland (2<sup>nd</sup> Revised Edition), Amsterdam (1979).
- [19] N. Yamaguchi, Existence of global strong solution to the micropolar fluid system in a bounded domain, *Math. Methods Appl. Sci.* 28 (2005), no. 13, 1507-1526.

# Polinomios ortogonales de Sobolev con soporte no acotado

JUAN JOSÉ MORENO BALCÁZAR

Dpto. de Estadística y Matemática Aplicada, Univ. de Almería

balcazar@ual.es, <http://www.ual.es/~balcazar/>

## Resumen

Se considera el producto escalar no estándar

$$(f, g) = \int_{I_0} f g d\mu_0 + \lambda \int_{I_1} f' g' d\mu_1, \quad \lambda > 0, \quad I_0, I_1 \subseteq \mathbb{R}. \quad (1)$$

Los polinomios ortogonales (P.O.) con respecto a (1) son denominados P.O. de Sobolev. En este trabajo se abordan recientes avances y tendencias en el estudio de estos P.O. cuando al menos una de las medidas  $\mu_0$  y  $\mu_1$  tienen soporte no acotado. En concreto, se analiza los resultados y líneas señaladas en los artículos [1] y [2].

**Sección en el CEDYA 2007:** Teoría de Aproximación y Funciones Especiales

## Referencias

- [1] M. Alfaro, J.J. Moreno–Balcázar, A. Peña, M.L. Rezola, *Sobolev orthogonal polynomials: balance and asymptotics*, preprint, 2006.
- [2] F. Marcellán, J.J. Moreno–Balcázar *Asymptotics and zeros of Sobolev orthogonal polynomials on unbounded supports*. Acta Appl. Math., 94(2006), 163–192.

# Origen, motivación y resultados sobre dos ecuaciones no lineales en diferencias

FRANCISCO BALIBREA GALLEGO Y ANTONIO LINERO BAS

Dpto. de Matemáticas, Campus de Espinardo, Univ. de Murcia. 30.100 Murcia

balibrea@um.es y lineroba@um.es

## Resumen

Las ecuaciones en diferencias no lineales

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + x_n}{x_{n-1}}, \quad n \geq 1$$

$$x_{n+2} = x_n^2(x_{n+1} - 2) + 2, \quad n \geq 1$$

tienen su origen y su motivación en problemas de diferente naturaleza. La primera, en un problema de números planteado por Lyness en 1942 y otro de geometría sobre "frieze patterns" planteado por Coxeter en 1971; mientras que la segunda está motivada por un modelo para describir las propiedades de conducción y de aislamiento eléctrico de quasi-cristales, mediante una red de tipo "Thue-Morse".

En ambos casos precisaremos algunos aspectos relevantes de la deducción de tales ecuaciones y daremos algunos resultados sobre su comportamiento.

La primera ecuación es *globalmente periódica* (todas sus órbitas son periódicas) cuando  $\alpha = 1$  y *finalmente periódica* (todas sus órbitas o son periódicas o finalmente periódicas) para  $\alpha \neq 1$ .

En la segunda ecuación, tras su adecuado desplegamiento para poderla estudiar como un sistema discreto de dimensión dos, se encuentra un triángulo en el plano invariante para la ecuación, una curva invariante que une dos puntos fijos y que regula en buena parte la dinámica e interesantes propiedades asintóticas de las órbitas que comienzan fuera de dicho triángulo en el cuarto cuadrante.

Sección en el CEDYA 2007: EDO

## Referencias

- [1] F. Balibrea, J.L. García Guirao, M. Lampart and J. Llibre *Dynamics of a Lotka-Volterra map*, *Fundamenta Mathematicae*, Volume 191, (2006), 265-279.
- [2] E.A. Grove and G. Ladas *Periodicities in Nonlinear Difference Equations*. *Advances in Discrete Mathematics and Applications*, Volume 4, Chapman and Hall/CRC, 2005.

# Ciclos límite en campos polinomiales utilizando el método de averaging

JESÚS S. PÉREZ DEL RÍO, BELÉN GARCÍA

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Oviedo

jspr@uniovi.es, belen.garcia@uniovi.es

JAUME LLIBRE

Dpto. de Matemáticas, Univ. Autónoma de Barcelona

jllibre@mat.uab.es

## Resumen

Consideraremos en lo que sigue sistemas polinomiales de grado  $m$ , es decir, sistemas de la forma

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y),$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios cuyo grado máximo es  $m$ . Es bien conocido que el problema 16 de la lista de Hilbert consiste en determinar el número máximo de ciclos límite  $H_m$  que pueden poseer los sistemas polinomiales de un grado  $m$  fijado. En estos momentos es todavía un problema abierto la determinación de si  $H_2$  es acotado y, en su caso, su cálculo. El mejor resultado en esta dirección es la prueba de que un campo polinomial no puede tener infinitos ciclos límite (ver [1], [2]). Un posible camino para la obtención de ciclos límite es la perturbación de un campo vectorial con un centro y la determinación del número máximo de ciclos límite rodeando un punto singular que se pueden obtener por ese procedimiento constituye el problema 16 de Hilbert débil. Existen diversos métodos para analizar ese número (aplicación de Poincaré, integrales de Melnikov, ...) con los que las mejores estimaciones conocidas son las de [3]. En [4] se ha aplicado por primera vez a este problema el método de averaging que ha obtenido resultados prometedores cuando se aplica a centros modificados con una recta de puntos críticos, en cuyo caso, el "averaging" a primer orden aplicado a una perturbación polinomial de grado  $n$  permite obtener  $n$  ciclos límite hiperbólicos. Con este mismo método en [5] se obtienen hasta 6 ciclos límite cuando se sustituye la recta de puntos críticos por cónicas y la perturbación se efectúa con polinomios de grado 3. En el trabajo que presentaremos ([6]) se considera una familia de curvas de puntos críticos que incluye algunas cónicas conocidas y se obtendrá el número de ciclos límite para este caso que resulta ser de tipo cuadrático en  $m$ .

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] J. Ecalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, Paris, 1992.
- [2] Yu. S. Il'yashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 94, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1991.
- [3] C. Li, W. Li, J. Llibre and Z. Zhang, *Polynomial systems: a lower bound for the weakened 16th Hilbert problem*. Extracta Mathematicae, 16 (2001), 441-447.
- [4] J. Llibre, J. S. Pérez del Río, J. A. Rodríguez, *Averaging analysis of a perturbed quadratic center*. Nonlinear Analysis 46 (2001), 45-51.
- [5] J. Giné, J. Llibre, *Limit cycles of cubic polynomial fields via averaging theory*, aparecerá en Nonlinear Analysis.
- [6] B. García, J. S. Pérez del Río, J. Llibre, *Limit cycles of polynomial vector fields via averaging theory*, en preparación.

# Algunos resultados sobre periodicidad de ecuaciones en diferencias de orden dos y tres

ANTONIO LINERO BAS, FRANCISCO BALIBREA GALLEGO

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Murcia

lineroba@um.es, balibrea@um.es

## Resumen

Existe una gran cantidad de modelos biológicos, económicos, ... cuya evolución se describe a partir de ecuaciones (autónomas) en diferencias. Un ejemplo paradigmático es la ecuación logística

$$x_{n+1} = (1 + a - bx_n)x_n,$$

que modela cómo evoluciona la densidad de población  $x_n$  de una cierta especie biológica (insectos, ratones, ...), donde  $a$  es un valor positivo relacionado con la tasa máxima de crecimiento en ausencia de factores negativos, mientras que  $b$  es una medida de la capacidad o resistencia del medio para albergar cantidades cada vez mayores de población (véase [7]). El modelo anterior es una discretización del modelo logístico continuo  $x'(t) = (a - bx(t))x(t)$ . En [8], Volterra reemplaza la ecuación diferencial anterior por esta otra,  $x'(t) = (a - \int_0^t b(t-\tau)x(\tau)d\tau)x(t)$ . Una ecuación en diferencias de orden  $k$  paralela a la ecuación diferencial anterior es  $x_{n+k+1} = (1 + a - \sum_{j=0}^k \alpha_j x_{n+j})x_{n+k}$ , conocida como función logística generalizada, donde  $a > 0$  y los coeficientes  $\alpha_j$  son no negativos (véase [6]).

Hay casos particulares del modelo discreto anterior que se ajustan a ecuaciones de la forma  $x_{n+3} = x_{n+2}f(x_{n+1}, x_n)$ , donde  $f$  es una función definida en  $(0, \infty)^2$  que toma valores positivos. El objeto de la presente comunicación es considerar el tópico de la periodicidad (global) en este tipo de ecuaciones de orden tres, así como presentar nuevos resultados sobre periodicidad de algunas ecuaciones en diferencias de orden dos y sus generalizaciones. Los artículos en que aparecen recogidos estos resultados son [1, 2, 3, 4, 5].

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] F. Balibrea, A. Linero. *On the periodic structure of delayed difference equations of the form  $x_n = f(x_{n-k})$  on  $I$  and  $S^1$* . J. Difference Equ. Appl. **9** (2003), 359-371.
- [2] F. Balibrea, A. Linero. *Some new results and open problems on periodicity of difference equations*. Grazer Math. Ber. **350** (2006), 15-38.
- [3] F. Balibrea, A. Linero. *On global periodicity of  $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$* . World Scientific Publ., Proceedings of the Conference On Difference Equations, Munich (Germany), 2005.
- [4] F. Balibrea, A. Linero. *On the global periodicity of some difference equations of third order*. Preprint, 2007.
- [5] F. Balibrea, A. Linero, G. Soler, S. Stević. *Global periodicity of  $x_{n+k+1} = f_k(x_{n+k}) \cdots f_2(x_{n+2})f_1(x_{n+1})$* . J. Difference Equ. Appl., en prensa.
- [6] S.H. Levine, D.J. Plunkett, F.M. Scudo. *Persistence and convergence of ecosystems: an analysis of some second order difference equations*. J. Math. Biol. **4** (1977), 171-182.
- [7] R. M. May. *Biological populations obeying difference equations: stable points, stable cycles and chaos*. Journal of Theoretical Biology **51** (1975), 511-525.
- [8] V. Volterra. *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animal conviventi*. Mem. Accad. Lincei **2** (1926), 31-114.

# Skew-product maps with base having closed set of periodic points

JUAN LUIS GARCÍA GUIRAO

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena

juan.garcia@upct.es, <http://www.dmae.upct.es/jlguirao>

MIGUEL ÁNGEL LÓPEZ GUERRERO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha

mangel.lopez@uclm.es

## Resumen

Our frame of working will be discrete dynamical systems induced by *skew-product maps* defined on the unit square  $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ , i.e., continuous transformations from  $I^2$  into itself of the form  $F : (x, y) \rightarrow (f(x), g(x, y))$ . The maps  $f$  and  $g$  are respectively called the *base* and the *fiber* map of  $F$ . These type of systems are the mathematical environment for modelling some biological, economical and engineering processes, thus the study of their dynamics is a important problem ([2]).

The aim of this communication is to present a example of a skew-product map with base having closed set of periodic points holding the following property:

$$\Omega(G) \neq \overline{\bigcup_{x \in P(g)} \{x\} \times \Omega(G^{p_x}|_{I_x})}, \quad (1)$$

where  $P(\cdot)$  and  $\Omega(\cdot)$  represent respectively the set of periodic and nonwandering points.

This result disprove a theorem from Efremova [1] and has some nontrivial implications, for instance, it forces the non equivalence between the properties

- $P(F)$  is closed,
- $P(F) = \Omega(F)$ .

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] L. S. Efremova, *On the nonwandering set and the center of triangular maps with closed set of periodic points in the base*, Dynamical Systems and Nonlinear Phenomena, Inst. Math. NAS Ukraine, Kiev, 1990, 15 – 25 (in Russian).
- [2] S.F. Kolyada. *On Dynamics of Triangular Maps of the Square*, Ergodic Theory and Dynamical Systems. **12** (1992) 749–768.



# Extrapolación Polinómica Recíproca para Sistemas de EDO's

SERGIO AMAT, FERNANDO MANZANO

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística, U.P. Cartagena.

sergio.amat@upct.es

## Resumen

Cuando se aborda un problema en Análisis Numérico se persiguen ciertos objetivos, como son: convergencia, estabilidad, precisión, etc. En muchas ocasiones, para lograr estos objetivos, se necesitan discretizaciones con gran cantidad de nodos que hacen disminuir la eficiencia de los métodos.

Así, sería interesante obtener alternativas que evitasen posibles problemas como: excesivo coste computacional o aumento de los errores de redondeo. Un caso particular son las técnicas de extrapolación, que mediante varias aplicaciones del método son capaces que aumentar el orden del mismo y en ciertas ocasiones sus regiones de estabilidad.

En este trabajo analizamos para sistemas de ecuaciones una técnica de extrapolación que fue introducida para problemas escalares en [1]. Los ejemplos numéricos para sistemas indican que resulta ser una buena alternativa a las extrapolaciones lineales (Richardson) que son las más utilizadas.

## Referencias

- [1] S.Amat, S.Busquier and V.Candela, *Reciprocal Polynomial extrapolation*, J. of Comput. Math., **22** (1), (2004), 1-10.

# Equi-atracción y dependencia continua de atractores para ecuaciones con retardo

PEDRO MARÍN-RUBIO

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla

pmr@us.es

PETER KLOEDEN

FB Mathematik, Johann Wolfgang Goethe Universität, Frankfurt am Main, Alemania

kloeden@math.uni-frankfurt.de

## Resumen

La semi-continuidad superior de atractores con respecto a parámetros es un resultado bien conocido en la teoría de sistemas dinámicos. Sin embargo, en general, la semi-continuidad inferior, y por tanto la continuidad, no suele tenerse sin hipótesis adicionales, las cuáles usualmente se establecen en términos de la estructura del atractor.

Una aproximación al problema la constituye un reciente trabajo de Li y Kloeden [2] donde se muestra que la dependencia continua del parámetro es equivalente a una propiedad de equi-atracción de los atractores parametrizados. Estos resultados también se pueden aplicar al caso de ecuaciones con retardo fijo, aunque existe poco escrito sobre ecuaciones en las que el parámetro influye directamente en el retardo y por tanto en el propio espacio de fases.

Bajo condiciones adecuadas de regularidad, en [1] se muestra que la dependencia continua de atractores globales  $\mathcal{A}_\tau$  de semi-sistemas dinámicos  $S^{(\tau)}(t)$  sobre el espacio  $C([- \tau, 0]; Z)$  con  $Z$  un espacio de Banach y un tiempo de retardo  $\tau \in [T_*, T^*]$ , donde  $T_* > 0$ , es equivalente a una propiedad de equi-atracción de los atractores.

Para ello, previamente deberemos:

- sumergir todos los elementos en un espacio común: Si  $S^{(\tau)}$  es un semi-sistema dinámico en  $C_\tau$ , entonces existe un semi-sistema dinámico  $\{\widehat{S}_t^{(\tau)}, t \in R_+\}$  en  $C_{T^*}$  que lo extiende,
- probar, supuesta la existencia de atractores para los sistemas originales, que los semi-sistemas dinámicos extendidos  $\widehat{S}^{(\tau)}$  en  $C_{T^*}$  también poseen un atractor global  $\widehat{\mathcal{A}}_\tau$  en  $C_{T^*}$  y establecer su relación con los originales  $\mathcal{A}_\tau$ ,
- para terminar traduciendo las propiedades de equi-atracción y equi-disipación de los sistemas extendidos en términos de los originales.

Se añadirán ejemplos y contraejemplos que ilustran la teoría desarrollada.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] P. Kloeden and P. Marín-Rubio, *Equi-Attraction and the continuous dependence of attractors on time delays*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. A, To appear.
- [2] D.S. Li and P.E. Kloeden, *Equi-attraction and the continuous dependence of attractors on parameters*, Glasgow Math. J., **46** (2004), 131–141.

# Positivity-preserving for Runge-Kutta methods

I. HIGUERAS, T. ROLDÁN

Dpto. de I. Matemática e Informática, Univ. Pública de Navarra

higueras@unavarra.es, teo@unavarra.es

## Resumen

In this paper we consider IVPs for systems of ODEs that can be written in the form

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(t) &= f(y(t)), \\ y(t_0) &= y_0.\end{aligned}\tag{1}$$

We assume that  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  is a sufficiently smooth function so that for each  $t_0 \in \mathbb{R}$  and  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  the problem (1) has a unique solution  $y : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ . In the literature much attention has been paid in problems like (1) having monotonicity or positivity properties [1], [4], [7], [8]. For example, if the solution represents concentrations of chemical species, then  $y_0 \geq 0$  implies  $y(t) \geq 0$  for all  $t > 0$ .

If we solve (1) numerically, it would be desirable that the numerical method preserves these monotonicity properties. Runge-Kutta methods having these properties have been studied in the last years [2], [3], [4], [6], [8], [9]. Monotonicity and also positivity results have been obtained for the numerical solution under certain step size restriction.

In some cases, the stiffness of the problem makes necessary to solve it with an implicit method. If we solve the IVP with an implicit Runge-Kutta (IRK) method, then the highest computational effort is due the resolution of a nonlinear system in each step. Although there are a number of schemes to solve this nonlinear system, variants of Newton's method are used in all modern ODE codes. The monotonicity results obtained for IRK methods mean that the nonlinear systems are solved exactly, but, in practice, these systems are solved approximately by means of some iterative scheme. Consequently, it is important that the technique used to solve the nonlinear systems maintains the monotonicity properties. In particular, if we deal with positivity and we are using a method to get starting values for the iterations, then it is important that these values are positive.

In this work we consider a kind of starting algorithms studied in [5], and analyze the attainable order so that the starting values are positives. We will see how for many positive methods, the optimum predictor cannot be positive.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] Bruggeman, J., Burchard, H., Kooi, B., Sommeijer, B. A second-order, unconditionally positive, massconserving integration scheme for biochemical systems. *Applied Numerical Mathematics* 57 (2007), 36–58.
- [2] Gerisch, A., and Weiner, R. On the positivity of low order explicit Runge-Kutta schemes applied in splitting methods. *Comput. Math. Appl.* 45 (2003), 53–67.
- [3] S. Gottlieb, C. Shu, E. Tadmor, Strong stability-preserving high order time discretization methods, *SIAM Rev.* 43 (2001) 89–112.
- [4] I. Higueras, On strong stability preserving time discretization methods, *J. Sci. Comput.* 21 (2004) 193–223.
- [5] I. Higueras and T. Roldán, Starting algorithms for some DIRK methods, *Numerical Algorithms*, 23 (2000) 357–369.
- [6] Horváth, Z. Positivity of RK and diagonally split RK methods. *Appl. Numer. Math.* 28 (1998), 309–326.
- [7] W. Hundsdorfer, J. Verwer, Numerical solution of time-dependent Advection-Diffusion-Reaction equations, *Springer Series in Computational Mathematics*, 2003.
- [8] Kraaijevanger, J. Contractivity of Runge-Kutta methods. *BIT* 31 (1991), 482–528.
- [9] M. Spijker, Stepsize restrictions for stability of one-step methods in the numerical solution of initial value problems, *Math. Comp.* 45 (1985) 377–392.

# Dinámica para un modelo compartimental no lineal y no autónomo

VÍCTOR MUÑOZ, SYLVIA NOVO, RAFAEL OBAYA

Dpto. de Matemática Aplicada y Computación, Universidad de Valladolid

vicmun@wmatem.eis.uva.es, sylnov@wmatem.eis.uva.es, rafoba@wmatem.eis.uva.es

## Resumen

Una cuestión importante en el estudio de las ecuaciones diferenciales no autónomas consiste en la descripción del comportamiento a largo plazo de las trayectorias. Nos centraremos en el estudio de un modelo compartimental que pasamos a introducir.

Supongamos que tenemos un sistema de  $n$  compartimentos  $C_1, \dots, C_n$  entre los que fluye materia a través de unas tuberías; denotamos por  $P_{i,j}$  a la tubería que lleva materia del compartimento  $C_j$  al  $C_i$  para  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  con  $i \neq j$ . Llamaremos  $C_0$  al entorno en que se encuentra el sistema y, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_i$  será la cantidad de materia que hay en el compartimento  $C_i$ . Sea  $g_{i,j} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función que determina el caudal de salida de materia desde  $C_j$  hacia  $C_i$  en función del tiempo  $t$  y del valor de  $x_j$  en  $t$  para  $i \in \{0, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\}$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , supondremos que existe un caudal de entrada de materia  $I_i$  en el compartimento  $C_i$  y que éste solo depende del tiempo.

Con esto, si suponemos que el paso de materia entre los compartimentos no es instantáneo, se tiene que el modelo obedece al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con retardo infinito:

$$x'_i(t) = -g_{0,i}(t, x_i(t)) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_{j,i}(t, x_i(t)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{-\infty}^t g_{i,j}(\tau, x_j(\tau)) h_{i,j}(t - \tau) d\tau + I_i(t), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

donde  $h_{i,j} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función no negativa con integral 1 y primer momento finito en  $[0, +\infty)$  que, para cada  $t \in [0, +\infty)$ , representa qué parte de materia tarda  $t$  en recorrer  $P_{i,j}$  de entre toda la materia que dejó  $C_j$  hacia  $C_i$  en un instante dado para  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  con  $i \neq j$ .

Bajo ciertas condiciones de admisibilidad para las funciones  $g_{i,j}$  que definen el sistema anterior, demostramos la estabilidad de todas sus trayectorias. En el caso de que el sistema sea cerrado o bien asumiendo ciertas condiciones sobre las funciones de entrada y salida de materia en el sistema y las conexiones entre sus compartimentos, se prueban la estabilidad uniforme y la acotación de todas las soluciones.

Podemos entonces aplicar los resultados de [3] para concluir que los conjuntos omega-límite son copias de la base y describir el comportamiento asintótico de las soluciones.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] J.A. Jacquez, C.P. Simon. *Qualitative theory of compartmental systems*. SIAM Review Vol.35, No.1 (1993), 43-49.
- [2] J.A. Jacquez, C.P. Simon. *Qualitative theory of compartmental systems with lags*. Mathematical Biosciences 180 (2002), 329-362.
- [3] S. Novo, R. Obaya, A.M. Sanz. *Stability and extensibility results for abstract skew-product semiflows*. J. Differential Equations 235 No. 2 (2007), 623-646.
- [4] J. Wu, H.I. Freedman. *Monotone semiflows generated by neutral functional differential equations with application to compartmental systems*. Canadian Journal of Mathematics Vol.43(5) (1991), 1098-1120.

# Estrategias de “semicoarsening” en la aplicación del “smoother” SDI en problemas anisotrópicos tridimensionales

J.R. GALO

Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Universidad de Córdoba  
malgasaj@uco.es

## Resumen

Las ecuaciones anisotrópicas tienen su génesis en aquellos problemas en los que las propiedades del medio físico dependen de la dirección espacial. Pero la anisotropía, indirectamente, también surge en la resolución de problemas isotrópicos cuando se necesita el uso de discretizaciones no regulares en la aplicación de métodos en diferencias finitas, por ejemplo en la necesaria búsqueda del equilibrio entre el coste computacional y el número de nodos a emplear para poder detectar pequeñas estructuras tales como remolinos o capas límite; es la denominada anisotropía discreta.

En trabajos previos ([3], [4]) hemos analizado la convergencia del método paralelo SDI (“Simultaneous Directions Implicit”) aplicado a la resolución de problemas elípticos isotrópicos, así como en la de problemas más complejos como las ecuaciones de Navier–Stokes [1]. En [7] también demostramos su buen comportamiento como “smoother”, lo que le permite ser una buena alternativa para su integración en un esquema “multigrid”.

La consideración de anisotropías, en los problemas citados, requirió la determinación de los parámetros óptimos de convergencia del método SDI (consultar [5]) y, a su vez, permitió detectar que, aunque este método se basa en la resolución por líneas, el factor de “smoothing” degenera a medida que aumenta la anisotropía, hecho que en general ocurre con los “pointwise smoothers” ([2], [8] y [9]). En el XIX CEDYA (ver [6]) presentamos una alternativa correctora de esta degeneración en el caso del problema de Helmholtz bidimensional.

En el trabajo que aquí presentamos, se refleja un análisis cuyo objetivo es corregir la degeneración del factor de “smoothing” del método SDI cuando es aplicado a la ecuación anisotrópica tridimensional de Helmholtz, la cual puede definirse por el operador en derivadas parciales:

$$L^{\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2} := \alpha I - \varepsilon_1 \partial_{x_1}^2 - \varepsilon_2 \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2,$$

donde  $\alpha \geq 0$  y  $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1$ . Según las ratios existentes entre  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y la unidad, se pueden considerar cuatro situaciones representativas. En cada uno de estos casos, mediante el uso de la técnica LFA (“Local Fourier Analysis” [8]) y considerando diferentes alternativas de “semicoarsening” (engrosamiento parcial), se aborda la determinación del factor de “smoothing” y su comportamiento en relación con la anisotropía, lo que permite establecer cuál es la estrategia conducente a un valor óptimo de dicho factor y consecuentemente a una adecuada velocidad de convergencia cuando este “smoother” se integra en un esquema “multigrid”.

**Palabras clave:** Direcciones simultáneas, Helmholtz anisotrópico, Smoother, Multigrid

**Sección en el CEDYA 2007:** AN (Análisis Numérico y Simulación Numérica)

## Referencias

- [1] I. Albarreal; M.C. Calzada; J.L. Cruz; E. Fernández-Cara; J.R. Galo; M. Marín. *Time and space parallelization of the Navier-Stokes equations*. Comput. and Appl. Math., Vol.24, No.3 (2005), 1-22.
- [2] A. Brandt, *Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems*, Math. Comp. **31** (138) (1977), 333–390.
- [3] J.R. Galo; I. Albarreal; M.C. Calzada; J.L. Cruz; E. Fernández-Cara; M. Marín, *Simultaneous directions method for elliptic and parabolic systems*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **339** (2004), 145–150.
- [4] J.R. Galo; I. Albarreal; M.C. Calzada; J.L. Cruz; E. Fernández-Cara; M. Marín, *Stability and convergence of a parallel fractional step method for the solution of linear parabolic problems*. Applied Mathematics Research eXpress, Vol. 4 (2005), 117-142.
- [5] J.R. Galo; M.C. Calzada; J.L. Cruz; M. Marín, *Convergencia y optimización del método de direcciones simultáneas en problemas elípticos anisotrópicos*. Actas de XIX CEDYA (2005).
- [6] J.R. Galo; M.C. Calzada; J.L. Cruz; M. Marín, *Alternativa a la degeneración del factor de “smoothing” del método SDI en problemas elípticos anisotrópicos*. Actas de XIX CEDYA (2005).
- [7] J.R. Galo; I. Albarreal; M.C. Calzada; J.L. Cruz; E. Fernández-Cara; M. Marín, *The Smoothing Effect of a Simultaneous Directions Parallel Method as Applied to Poisson Problems*. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Vol. 22 (2006), 414-434. DOI 10.1002/num.20102.
- [8] U. Trottenberg; C.W. Oosterlee; A. Schüller. *“Multigrid”*, Academic Press, New York, 2001.
- [9] I. Yavneh, *Multigrid smoothing factors of red-black Gauss-Seidel applied to a class of elliptic operators*, SIAM J. Numer. Anal. **32**, (6) (1995), 1126-1138.

# Un método paralelo para flujos de partículas rígidas basado en dominios ficticios

JORDI BLASCO

Dpt. de Matemàtica Aplicada I, Univ. Politècnica de Catalunya  
jorge.blasco@upc.edu

M<sup>a</sup> CARMEN CALZADA

Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Univ. de Córdoba  
ma1canam@uco.es

MERCEDES MARÍN

Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Univ. de Córdoba  
ma1mabem@uco.es

## Resumen

En esta comunicación se presenta un método numérico paralelo para la simulación de flujos de partículas en un fluido incompresible viscoso newtoniano.

El movimiento del fluido está regido por la ecuación de Navier-Stokes incompresible no estacionaria en el dominio fluido, mientras que el movimiento de las partículas está gobernado por las ecuaciones de sólido rígido. Se utiliza una técnica de dominio ficticio ([4]) que permite resolver la ecuación de Navier-Stokes en una malla fija. La condición de sólido rígido no se impone sobre las partículas mediante el habitual método de los multiplicadores de Lagrange distribuidos ([4]), sino que se utiliza una técnica basada en la conservación de los momentos lineal y angular ([5]) que reduce el cálculo del movimiento de cada partícula al cálculo de dos integrales sobre ella.

La paralelización se consigue, en primer lugar, mediante un método de paso fraccionado para el avance en el tiempo que conduce a la resolución de un problema de tipo Burgers y un problema de Stokes independientes en cada paso de tiempo ([1]), que pueden resolverse simultáneamente. En función del número de procesadores disponibles, puede paralelizarse además la resolución de cada uno de esos dos problemas reduciéndolos a problemas de Poisson unidimensionales mediante el método SDI (Simultaneous Directions Implicit, [2, 3]). Los problemas a resolver son independientes entre sí y su resolución puede distribuirse entre los diferentes nodos, proporcionando así un alto nivel de paralelización.

La implementación paralela se lleva a cabo sobre un *cluster* paralelo usando el protocolo MPI. Se presentan, finalmente, algunos resultados numéricos obtenidos en diferentes problemas de sedimentación de una y varias partículas.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] I.I. Albarreal, M.C. Calzada, J.L. Cruz, E. Fernández-Cara, J.R. Galo, M. Marín. *Convergence analysis and error estimates for a parallel algorithm for solving the Navier-Stokes equations*. Numerische Mathematik, 93 (2002), 201-221.
- [2] I.I. Albarreal, M.C. Calzada, J.L. Cruz, E. Fernández-Cara, J.R. Galo, M. Marín. *Time and space parallelization of the Navier-Stokes equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 24 (2005), 115-130.
- [3] J.R. Galo, I. Albarreal, M.C. Calzada, J.L. Cruz, E. Fernández-Cara, M. Marín. *A Simultaneous direction parallel algorithm for the Navier-Stokes equations*. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 339 (2004), 235-241.
- [4] R. Glowinski, T.W. Pan, T.I. Hesla, D.D. Joseph. *A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows*. International Journal of Multiphase Flow, 25 (1999), 755-794.
- [5] N. Sharma, N.A. Patankar. *A fast computation technique for the direct numerical simulation of rigid particulate flows*. Journal of Computational Physics, 205 (2005), 439-457.

# Optimal Error Estimate of the Penalty Finite Element Method for Micropolar Fluids Equations

ELVA E. ORTEGA-TORRES\*

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Antofagasta, Casilla 170, Antofagasta-Chile

eortega@uantof.cl

MARKO A. ROJAS-MEDAR<sup>+</sup>

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Estadual de Campinas, CP 6065, 13083-859, Campinas-SP, Brazil

marko@ime.unicamp.br

## Resumen

An optimal error estimate of the numerical velocity, pressure and angular velocity, is proved for the fully discrete penalty finite element method of the micropolar equations, when the parameters  $\epsilon$ ,  $\Delta t$  and  $h$  are sufficiently small. In order to obtain above we present the time discretization of the penalty micropolar equation which is based on the backward Euler scheme; the spatial discretization of the time discretized penalty Micropolar equation is based on a finite elements space pair  $(X_h, M_h)$  which satisfies some approximate assumption.

**Sección en el CEDYA 2007:** Análisis Numérico y Simulación Numérica

## Referencias

- [1] J.R. Hughes, W.T. Liu, and A.J. Brooks, *Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation*, J. Comp. Phys., 30 (1979), 1-60.
- [2] W. Layton and L. Tobiska, *A two-level method with backtraking for the Navier-Stokes equations*,SIAM J. Numer. Anal., 35 (1998), 2035-2056.
- [3] G. Lukaszewicz, *Micropolar fluids: theory and applications*, Birkhäuser, Berlin (1998).
- [4] E.E. Ortega-Torres and M.A. Rojas-Medar, *Magneto-micropolar fluid motion: global existence of strong solutions*, Abstr. Appl. Anal., 4, (1999), 109-125.
- [5] M.A. Rojas-Medar, *Magneto-micropolar fluid motion: existence and uniqueness of strong solution*, Math. Nachr., 188, (1997), 301-319.
- [6] J. Shen, *On error estimates of the penalty method with backtraking for the Navier-Stokes equations*,SIAM J. Numer. Anal., 32 (1995), 386-403.

---

\* Partially supported by Fondecyt-Chile, Grant Nro. 1040205.

<sup>+</sup> Partially supported by DGI-MEC (Spain), Grant BFM2003-06446, CGCI MEC-DGU Brazil/Spain Grant 2137-05-4 and Fondecyt-Chile (Cooperación Internacional), Grant Nro. 7060025.

# Análisis de la convergencia del M.E.F. en algoritmos de descomposición de dominio con adaptación de mallado

M. M. SIMÕES

Dpto. de Matemática, Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico da Guarda  
msimoes@ipg.pt

L. FERRAGUT

Instituto Universitario de Física Fundamental y Matemáticas, Univ. Salamanca  
ferragut @usal.es

## Resumen

En este trabajo se presenta un algoritmo numérico para la resolución de problemas elípticos lineales y no lineales combinando técnicas de descomposición de dominios con el método de elementos finitos adaptativo. La principal aportación de este trabajo es, pues, la combinación de técnicas de descomposición de dominio con técnicas de adaptación de mallado. Consideramos la formulación del problema modelo haciendo uso de operadores multívocos. La ventaja de usar descomposición de dominios está en el hecho de que podemos considerar un problema que presente características distintas en distintas partes del dominio, como por ejemplo la no linealidad. Considerando la descomposición de dominio adecuada se ahorra tiempo de cálculo y recursos del ordenador, ya que sólo vamos a resolver un problema no lineal en el subdominio correspondiente. Por otra parte, la formulación mediante operadores multívocos permite incorporar de manera sencilla la adaptación del mallado a cada subdominio. Para finalizar mostramos algunos experimentos numéricos.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] R. Glowinski, *Numerical methods for fluids*, P.G.Ciarlet and J. L. Lions Editors, Vol. IX, 2003.
- [2] J.L. Lions and O. Pironneau, *Domain decomposition methods for CAD*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I (1999), 73-80.
- [3] J.L. Lions and O. Pironneau, *Virtual control, replicas and decomposition of operators*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I (2000), 47-54.
- [4] J.L. Lions and O. Pironneau, *Overlapping domain decomposition for evolution operators*. C. R. Acad. Sci. Paris t. 330, Série I (2000), 1-6.
- [5] J.L. Lions and O. Pironneau, *Non-overlapping domain decomposition for evolution operators*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I (2000), 943-950.
- [6] F.A. Pérez, *Métodos Adaptativos para Problemas No Lineales Asociados a Operadores Multívocos y Aplicaciones*, Tesis Doctoral, Salamanca, 2005.



# Aplicaciones de una familia de difusión anisotrópica sobre la evolución de algunos contornos activos

C.PLATERO, G.ASENSIO, P.GONZÁLEZ, J.M.PONCELA, J.SANGUINO, M.C.TOBAR

Applied BioEngineering Group (ABE-UPM)

Depto. Matemática aplicada E.U.I.T.I.

Depto. Electrónica, automática e informática industrial E.U.I.T.I.

<http://www.elai.upm.es/spain/Investiga/Bioingenieria/bioing.htm>

## Resumen

Una familia de difusión anisotrópica se ha presentado como técnica de realzado de imágenes [1], con la característica de combinar la difusión directa en la curva de nivel con una difusión inversa estabilizada en la componente normal. Se ha mostrado efectiva en la definición de la geodesia en el plano de la imagen, mejorando los resultados del contorno activo geodésico [2]. Además, permite la introducción de conocimiento a priori, al combinar las técnicas de morfología con agrupamiento natural de los píxeles, formado super-píxeles que definen fronteras en la evolución del contorno [3]. Los mejores resultados de la familia coinciden con la propuesta de Keeling [4].

Dentro de los contornos basados en regiones, la aplicación del procesamiento propuesto mejora los resultados de un funcional basado en las varianzas de los grupos [5]. Se relaciona con un funcional de Mumford-Shah, donde se procede a su regularización TV [6] y posteriormente, el contorno activo evoluciona minimizando la varianza entre grupos.

Los costes computacionales se han reducido drásticamente. Para el procesamiento se ha utilizado un escenario semi-implícito con una formulación conservativa. Mientras, el contorno activo se ha empleado una nueva técnica narrow-band, en un entorno 3x3 alrededor de los puntos de paso por cero [7].

Esta metodología se ha utilizado para el análisis de imágenes biomédicas procedentes de microscopía en campo claro.

**Sección en el CEDYA 2007:** Solución numérica de Ecuaciones en Derivadas Parciales

## Referencias

- [1] C. Platero, J. Sanguino, M. C. Tobar, P. González, G. Asensio, J. M. Poncela, *An anisotropic diffusion filters family for image enhancement*, Third edition of the Iberian Conference on Pattern Recognition and Image Analysis, Gerona, 6-8 junio, 2007.
- [2] Caselles, V., Kimmel, R., and Sapiro, G., *Geodesic active contours*, International Journal of Computer Vision, (1997) 22(1):61-79.
- [3] C. Platero, J. Sanguino, P.M. González, M.C. Tobar, G. Asensio, *Agrupación no supervisada de los píxeles*, XXVII Jornadas de Automática, Almería, 6-9 de septiembre, 2006.
- [4] S. L. Keeling and R. Stollberger. *Nonlinear anisotropic diffusion filters for wide range edge sharpening. Inverse Problems*, (2002) 18:175-190.
- [5] Chan, T. and Vese, L. *Active contours without edges. IEEE Transactions on Image Processing*, (2001) 10(2):266-277.
- [6] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Physical D, (1992) 60:259-268.
- [7] Chunming Li, Chenyang Xu, Changfeng Gui, Martin D. Fox, *Level Set Evolution without Re-Initialization: A New Variational Formulation*, CVPR (1) 2005: 430-436.

# Resolución numérica de algunos sistemas parabólico-elípticos no lineales

MARÍA TERESA GONZÁLEZ MONTESINOS, FRANCISCO ORTEGÓN GALLEGO,

JOSÉ MANUEL DÍAZ MORENO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

mariateresa.gonzalez@uca.es, francisco.ortegon@uca.es, josemanuel.diaz@uca.es

## Resumen

El calor producido por una corriente eléctrica que atraviesa un semiconductor está descrito por el llamado problema del termistor, consistente en un sistema de dos ecuaciones acopladas, una parabólica no lineal y otra elíptica, para la temperatura,  $u$ , y el potencial eléctrico,  $\varphi$ .

Gracias a las leyes de Ohm y Fourier se tiene que  $\mathcal{J} = \bar{\sigma}(u)\mathcal{E}$  y  $\mathcal{Q} = -\bar{a}(u)\nabla u$ , donde  $\mathcal{J}$  es la intensidad de corriente eléctrica,  $\mathcal{Q}$  el flujo de calor,  $\mathcal{E} = -\nabla\varphi$  el campo eléctrico, y  $\bar{\sigma}(u)$  y  $\bar{a}(u)$  son las conductividades eléctrica y térmica, respectivamente. El problema del termistor se deduce a partir de las leyes de conservación de la corriente y la energía, a saber,

$$\nabla \cdot \mathcal{J} = 0, \quad \rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{Q} = \mathcal{J} \cdot \mathcal{E},$$

siendo  $\rho$  la densidad del semiconductor, y  $c$  su capacidad calorífica. Suponiendo que  $\rho$  y  $c$  son constantes y escribiendo  $\sigma(u) = \bar{\sigma}(u)/(\rho c)$  y  $a(u) = \bar{a}(u)/(\rho c)$ , se obtiene

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (a(u)\nabla u) = \sigma(u)|\nabla\varphi|^2 & \text{en } \Omega_T = \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot (\sigma(u)\nabla\varphi) = 0 & \text{en } \Omega_T, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T), \\ \varphi = \varphi_0 & \text{sobre } \Gamma_T, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{en } \Omega, \end{array} \right\} \quad (1)$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , dominio ocupado por el dispositivo eléctrico, es un abierto acotado y regular,  $N \geq 1$  y  $T > 0$ .

Cuando la conductividad térmica es de tipo Wiedemann–Franz, es decir,  $a(s) = Ls\sigma(s)$ ,  $L > 0$ , y se produce conducción metálica, esto es,  $\sigma(s) = O(s^{-1})$  para  $|s| \rightarrow +\infty$ , el estudio del problema (1) es muy complejo debido al carácter degenerado de la ecuación parabólica y el no uniformemente elíptico de la ecuación elíptica. Actualmente, bajo estas hipótesis sobre las conductividades, la existencia de soluciones débiles de (1) constituye un problema abierto; no obstante, en [1] los autores han demostrado la existencia de soluciones de capacidad para este sistema.

En este trabajo se presentarán diversos resultados numéricos obtenidos de la simulación numérica de (1) y otros problemas similares.

Nuestra finalidad reside pues en mostrar algunos de los resultados obtenidos en la resolución numérica del problema del termistor en el caso bidimensional, suponiendo que la conductividad térmica satisface la ley de Wiedemann–Franz y además se produce conducción metálica.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN, EDP

## Referencias

- [1] M. T. González Montesinos, F. Ortégón Gallego, *Existence of a capacity solution to a coupled nonlinear parabolic–elliptic system*. Commun. Pure Appl. Anal., 6, no. 1 (2007), 23–42.
- [2] R. Glowinski. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [3] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, K. Ohtsuka. *FreeFem++*, Version 2.11, 2006.

# Formulación de tipo Petrov-Galerkin de algunos métodos distributivos: Aplicación a las ecuaciones de Navier-Stokes

GLADYS NARBONA REINA<sup>1</sup>, TOMÁS CHACÓN REBOLLO<sup>2</sup>, MACARENA GÓMEZ MÁRMOL<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Dpto. de Matemática Aplicada I, Univ. de Sevilla

gnarbona@us.es

<sup>2</sup>Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla

chacon@us.es

macarena@us.es

## Resumen

Los Métodos Distributivos surgieron a principios de los años 80 gracias al trabajo de Roe [5, 6, 1] para la aproximación de la solución del problema de transporte. Algunos de estos métodos se han utilizado sobre todo en el campo de la Aeronáutica para la resolución de problemas trans y supersónicos. Gracias a sus buenas propiedades, tales como positividad y bien equilibrado al segundo orden, permiten obtener una solución que conserva las propiedades físicas del problema real.

En este trabajo presentamos una alternativa a la formulación clásica de los métodos distributivos. Algunos de estos métodos se pueden escribir bajo una formulación de tipo Petrov-Galerkin para la que definiremos un nuevo espacio discreto para el tratamiento del término de convección. En consecuencia podemos realizar el estudio teórico con mayor comodidad.

Como aplicación, realizamos el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias considerando de tipo convección-difusión. Utilizamos métodos distributivos para el tratamiento del término de transporte y Elementos Finitos  $\mathbb{P}_1$  para los términos de difusión. Obteniendo resultados de existencia de solución, convergencia y estimaciones de error.

Por último, presentaremos algunos test numéricos resueltos mediante un esquema de tipo distributivo, PSI, que mostrarán el buen comportamiento de este método, en particular en presencia de fuertes gradientes.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] Deconinck, H.; Paillère, H.; Struijs, R.; Roe, P.L.: *Multidimensional upwind schemes based on fluctuation-splitting for systems of conservation laws*, Computational Mechanics 11, pp. 323-340, (1993).
- [2] Perthame, B.: *Convergence of N-schemes for linear advection equations*, Trends in applications of mathematics to mechanics, Lisboa, pp.323-333, (1994).
- [3] B. Perthame; Y. Qiu; B. Stoufflet, *Sur la convergence des schémas fluctuation-splitting pour l'advection et leur utilisation en dynamique des gaz*, CRAS Paris 319(3), pp.283-288, (1994).
- [4] Roe, P.L.; Sildikover, D.: *Optimum positive linear schemes for advection in two and three dimensions*, SIAM J. Numer. Anal. 29(6), pp. 1542-1568 (1992)
- [5] R. Struijs; P.L. Roe; H. Deconinck: *Fluctuation splitting schemes for the 2D Euler equations*, VKI LS 1991-01 Computational Fluid Dynamics, (1991).
- [6] Struijs, R.; Deconinck, H.; Roe, P.L.; Do Palma, P.; Powell, A.G.: *Progress on multidimensional upwind euler solvers for unstructured grids*, AIAA 91-1550, (1991).

# Métodos Runge-Kutta-Nyström de Pasos Fraccionarios y reducción de orden

M. J. MORETA

Dpto. de Fundamentos del Análisis Económico I. Universidad Complutense de Madrid.  
mjesusmoreta@ccee.ucm.es

B. BUJANDA, J. C. JORGE

Dpto. de Ingeniería Matemática e Informática, Univ. Pública de Navarra  
blanca.bujanda@unavarra.es, jcjorge@unavarra.es

## Resumen

En esta comunicación nos ocupamos de la integración numérica eficiente de problemas de la forma

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = Au(x, t) + f(x, t), & x \in \Omega, & 0 \leq t \leq T < \infty, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = u_{t,0}(x), & x \in \Omega, \\ \partial u(x, t) = g(t), & x \in \partial\Omega, & 0 \leq t \leq T < \infty, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\Omega$  es un dominio espacial acotado y  $A$  es un operador diferencial que supondremos autoadjunto y semidefinido negativo.

Una de las formas más empleadas en la práctica para resolver el problema presentado es mediante el método de líneas, discretizando primero en espacio y después en tiempo o bien al revés, realizando primero una discretización temporal, seguida de la espacial. En cuanto a la integración temporal, una posibilidad es escribir (1) como un problema de primer orden en tiempo para utilizar métodos conocidos para la resolución de este tipo de problemas (métodos Runge-Kutta), mientras que otra opción es el uso de métodos específicamente diseñados para la integración numérica de problemas de segundo orden en tiempo, entre los que se encuentran los métodos Runge-Kutta-Nyström (RKN).

Los métodos Runge-Kutta-Nyström de Pasos Fraccionarios (RKNPF), presentados en [4], se pueden ver como una alternativa eficiente al uso de métodos RKN cuando se integran numéricamente problemas multidimensionales como (1). Es bien conocido que los métodos RKN explícitos presentan un bajo costo computacional por paso cuando integran problemas numéricos del tipo (1), sin embargo, cuando el problema es arbitrariamente rígido, estos métodos presentan problemas de estabilidad. Por otra parte, los métodos RKN implícitos, que pueden ser incondicionalmente estables, presentan el inconveniente de requerir un elevado coste computacional por etapa, sobre todo cuando se integran problemas multidimensionales en espacio. La utilización de métodos RKNPF permite evitar los problemas de estabilidad de los métodos RKN explícitos y, además, tienen la ventaja de requerir un bajo coste computacional por etapa comparado con otros métodos clásicos de integración temporal. Para obtener esta reducción del coste computacional, se divide el operador diferencial como una suma de operadores más simples en cierto sentido. Después, se integra en tiempo usando un método RKNPF subordinado a dicha partición; de esta manera, sólo una parte de la división actúa de manera implícita en cada etapa intermedia.

Cuando en (1) las condiciones frontera varían con el tiempo, aparece en forma notable el fenómeno conocido como reducción de orden, que ya ha sido estudiado para los métodos RKN (ver [2, 3]) y para los métodos Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios (ver [1]). Partiendo de las técnicas empleadas en [1, 3] se demuestra que modificando convenientemente de manera iterativa los valores que las etapas intermedias toman en la frontera, se puede atenuar este inconveniente y, en algunos casos, evitar por completo, recuperando el orden clásico del método RKNPF.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] I. Alonso-Mallo, B. Cano, J. C. Jorge, J. C. *Spectral-fractional step Runge-Kutta discretizations for initial boundary value problems with time dependent boundary conditions*, Math. Comp. **73** (2004), 1801–1825.
- [2] I. Alonso-Mallo, B. Cano, M. J. Moreta, *Order reduction and how to avoid it when explicit Runge-Kutta-Nyström methods are used to solve linear partial differential equations*, J. Comput. Appl. Math. **176** (2005), 293–318.
- [3] I. Alonso-Mallo, B. Cano, M. J. Moreta, *Optimal time order when implicit Runge-Kutta-Nyström methods solve linear partial differential equations*, Aceptado para publicación en APNUM.
- [4] M. J. Moreta, B. Bujanda, J. C. Jorge, *Fractional Step Runge-Kutta-Nyström methods*, enviado para publicación, 2006.

# Symmetric boundary element methods for Helmholtz transmission problems

M.-L. RAPÚN

Dpto. de Fundamentos Matemáticos , E.T.S.I. Aeronáuticos, Univ. Politécnica de Madrid  
marialuisa.rapun@upm.es

A. LALIENA

Dpto. de Matemática Aplicada, Esc. Univ. Politécnica La Almunia (Zaragoza)  
antonio.laliena@eupla.unizar.es

F.-J. SAYAS

Dpto. de Matemática Aplicada, C.P.S., Univ. de Zaragoza  
jsayas@unizar.es

## Resumen

The study of Helmholtz transmission problems in two or three dimensions arises in many applications related to scattering of acoustic, thermal or electromagnetic waves. The problem consists of Helmholtz equations with different wave numbers in a bounded domain and its exterior coupled with some transmission conditions.

Many different formulations and boundary element discretizations have been derived to deal in an efficient way with these problems [2]. Here we propose a new formulation, based on a paper by Martin Costabel and Ernst Stephan in 1985 [1], that uses the Calderón projector for the interior and exterior problems to develop closed expressions for the interior and exterior Neumann-to-Dirichlet operator. These operators are then matched to obtain an integral system that is equivalent to the Helmholtz transmission problem and uses Cauchy data on the transmission boundary as unknowns. By employing an additional mortar unknown with respect to the ones used in the original paper, we show that we can simplify the aspect and analysis of the method, writing it in an appropriate way to devise Krylov type iterations based on the separate Neumann-to-Dirichlet operators.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] M. Costabel, E. Stephan. *A direct boundary integral equation method for transmission problems*. J. Math. Anal. Appl. 106 (1985), 367–413.
- [2] R.E. Kleinman, P. A. Martin. *On single integral equations for the transmission problem of acoustics*. SIAM J. Appl. Math. 48 (1988), 307–325.

# Fourier-Galerkin methods for boundary integral equations on axisymmetric bodies: theoretical and algorithmic aspects

VÍCTOR DOMÍNGUEZ

Dpto. de Ingeniería Matemática e Informática, Univ. Pública de Navarra  
victor.dominguez@unavarra.es

NORBERT HEUER

Dep. of Mathematical Sciences School of Information Systems, Computing and Mathematics  
Brunel University, UK  
norbert.heuer@brunel.ac.uk

FRANCISCO-JAVIER SAYAS

Dpto. de Matemática Aplicada, CPS, Univ. de Zaragoza  
jsayas@unizar.es

## Resumen

In this work we present new results on the Fourier series boundary integral methods for axisymmetric domains. For these domains the usual integral equation on the boundary can be solved in an indirect way. Namely, the density is expanded in its Fourier series in terms of the angular variable. Then, each Fourier coefficient, which is itself a one-variable function, is in turn the solution of an integral equation, different for each coefficient, on the generatrix, i.e., the curve which generates the axisymmetric surface by rotation.

The advantages of this approach are clear. First, we have a reduction of the dimension of the problem. Instead of solving a 2D integral equation, arising itself from a 3D differential problem, we solve a 1D problem for each Fourier coefficient of the density. Secondly, there is no need to mesh the surface and we only have to work on the generatrix.

We restrict ourselves to the single layer equation for the Laplace operator. In spite of its simplicity, this problem retains the main features of the problem. Hence, it serves as a model problem to examine the difficulties we have to face and to test the numerical methods for solving the problem.

The functional properties of the line integral equations are analyzed. We prove that the ellipticity of the original problem is inherited by the line integral equations in adequate norms. Moreover, the corresponding operators turn out to be compact perturbations, in suitable spaces, of the single layer operator for the Laplace equation on the generatrix. This fact makes possible to extend the stability and convergence of some well-tested methods for integral equations on open arcs, such as collocation, spectral or quadrature methods, to the integral equations satisfied by the Fourier coefficients.

Two issues are also relevant for the applicability of the method. The first one is obtaining an estimate for the truncation error of the angular Fourier series. Having such an estimate makes possible to approximate the exact solution within a required tolerance avoiding the computation of an excessively large number of Fourier coefficients. The second one is to obtain a relation between the regularity of the unknown, in the original Sobolev spaces on the boundary, with the regularity of their Fourier coefficients on suitable weighted Sobolev spaces on the generatrix. Some results on these topics will be given.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] W. Wang, N. Atalla and J. Nicolas. *A boundary integral approach for acoustic radiation of axisymmetric bodies with arbitrary boundary conditions valid for all wave numbers*. J. Acoust. Soc. Am. 101 (1997), 1468-1478.
- [2] P. Juhl *An axisymmetric integral equation formulation for free space non-axisymmetric radiation and scattering of a known incident wave*, J. sound vib., 163 (1993), 397-406
- [3] F.-J. Sayas. *The numerical solution of Symm's equation on smooth open arcs by spline Galerkin methods.*, Comput. Math. Appl. 38 (1999) 87-99.
- [4] Y. Yan. *Cosine change of variable for Symm's integral equation on open arcs*, IMA J. Num. Anal. 10 (1990) 521-535.

# Estudio de la estabilidad dinámica de pares eje-cojinete en problemas evolutivos de lubricación

J. DURANY, J. PEREIRA-PÉREZ, F. VARAS

Dpto. Matemática Aplicada II, Universidad de Vigo

durany@dma.uvigo.es, curro@dma.uvigo.es

## Resumen

En lubricación hidrodinámica se ha utilizado muy frecuentemente la teoría isoterma como simplificación de los problemas que conducen al cálculo de las presiones. Sin embargo, en regímenes severos de funcionamiento, soportando grandes cargas y velocidades de rotación, la temperatura del fluido puede variar notablemente como consecuencia de la disipación energética por efectos viscosos y, también, por el intercambio térmico con el exterior del dispositivo. Este hecho puede influir de manera importante en la predicción de varias características de funcionamiento del par como, por ejemplo, en la potencia consumida. Además, es bien conocido de la experimentación y del análisis de modelos simplificados que, para ciertos valores de los parámetros de funcionamiento, el sistema eje-cojinete puede presentar respuestas dinámicas de ciclos límite. En estos modelos, tanto la curva de estabilidad neutral como las subcríticas y supercríticas de tipo bifurcación de Hopf, son fuertemente dependientes del comportamiento de la zona de cavitación y de la reformación de la película lubricante, especialmente en casos de excentricidad grande. Por ello, las simulaciones numéricas que se presentan en este trabajo tratan de clarificar este aspecto, analizando la respuesta dinámica del par sin imponer a priori la localización de la zona cavitada y, además, estudiando la influencia de los efectos térmicos en la estabilidad del proceso.

El modelo matemático que se tiene que resolver consiste en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales evolutivas. En concreto, el problema de frontera móvil de la ecuación de Reynolds con un modelo de cavitación de Elrod-Adams para calcular la presión del fluido lubricante, la ecuación de la energía para la temperatura del fluido y unas ecuaciones de conducción térmica en el eje y en el cojinete. El acoplamiento de las ecuaciones en derivadas parciales viene dada, por una parte, por una ley de variación de la viscosidad en función de la temperatura en la ecuación del flujo y, por otra parte, por medio de la influencia del campo de velocidades en la ecuación de la energía. Además, el acoplamiento térmico del fluido con el dispositivo viene dada por las condiciones de contorno en las paredes de contacto con eje y cojinete. Por último, los posibles desplazamientos del eje se calculan mediante un sistema de ecuaciones diferenciales que relaciona la aceleración de las coordenadas del centro de gravedad con las cargas debidas a la presión del fluido.

Para la resolución numérica del problema hidrodinámico se utiliza una semidiscretización en tiempo mediante el método de las características y en espacio vía elementos finitos, con un algoritmo de dualidad para la no linealidad que origina el problema de frontera móvil. La solución de la ecuación de la energía en el fluido lubricante se obtiene mediante un esquema de volúmenes finitos de tipo cell-vertex de orden dos (ver [1]), que permite obtener mejores aproximaciones de la solución que los esquemas habituales de descentrado (de orden uno) sin necesidad de refinar las mallas. La ecuación de conducción térmica en el cojinete se resuelve con un método de elementos de contorno P1 y técnicas de reciprocidad dual temporal (ver [2]), que evitan la integración de las funciones en todo el dominio y, junto con la simetría del problema, hacen que el coste computacional de esta etapa sea muy reducida. Finalmente, se resuelve un modelo térmico simplificado en el eje, que se considera isoterma debido a las altas velocidades de rotación.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] J. Durany, J. Pereira y F. Varas. *A cell-vertex finite volume method for thermohydrodynamic problems in lubrication theory*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. , Vol. 444-47 (2006), 5949-5961.
- [2] J. Durany, J. Pereira y F. Varas. *Mixed boundary element-finite volume methods for thermohydrodynamic lubrication problems*, En: Numerical Mathematics and Advanced Applications. A. Bermúdez et al. (eds), Springer, 2006.

# Crecimiento de burbujas de helio en residuos radiactivos.

B. TAPIADOR, A. CARPIO

Dpto. de Matemática aplicada, UCM, Madrid

btapiador@mat.ucm.es, acarpio@mat.ucm.es

## Resumen

Los desechos radiactivos generados por las centrales nucleares se suelen encerrar en contenedores que se entierran en cementerios nucleares, en tierra o en fosas marinas. Con el paso del tiempo, la pasta radiactiva, en general plutonio, se enfría y se generan defectos en la zona próxima a las paredes. En ellos se acumulan átomos de helio y se van formando burbujas que crecen y desgastan las paredes del contenedor, dando lugar a vertidos radiactivos en el entorno. Conseguir alterar los factores que confluyen en este proceso para retardar el desgaste tiene pues una importancia fundamental.

En [1] se propone un modelo de cinética discreta para el crecimiento de burbujas de helio en plutonio. El modelo fue analizado en [2], con la conclusión de que las soluciones representan distribuciones de tamaños de burbujas que crecen indefinidamente. Los datos experimentales almacenados indican que se debería alcanzar un tamaño máximo. En este trabajo, formulamos y resolvemos numéricamente un modelo corregido cuyas soluciones se adecuan mejor a las observaciones experimentales: se alcanza un tamaño máximo por debajo del cual la población de burbujas crece sin cesar.

El modelo acopla una restricción integral con un término fuente que genera las burbujas y una colección infinita de ecuaciones diferenciales de balance para la distribución de tamaños. El hecho de que la variable espacial sea discreta y la presencia de un término fuente no acotado dificultan el análisis de las soluciones. Introducimos técnicas para obtener expresiones asintóticas de las soluciones que coinciden razonablemente con las soluciones numéricas y reflejan el impacto de los parámetros del problema en la evolución de la población de burbujas [3]. Estas fórmulas son fundamentales para estudiar estrategias de retardo del desgaste del contenedor.

**Sección en el CEDYA 2007:** Análisis numérico

## Referencias

- [1] C.M. Schaldach, W.G. Wolfer, *Kinetics of helium bubble growth in nuclear and structural materials*, in *Effects of radiation materials: 21th minisymposium*, ML Grossbeck, TR Allen, RG Lott, AS Kumar, eds, ASTM STP 1447, ASTM International West Conshohocken.
- [2] LL Bonilla, A Carpio, J Neu, W Wolfer. *Kinetics of helium bubble growth in nuclear materials*. Physica D, vol.222, 131-140, 2006.
- [3] B Tapiador, A Carpio, en preparación, 2007



# Regularización no local de la ecuación de la calor inversa para realzamiento de imagenes digitales

A. BUADES, B. COLL, J.M. MOREL

Dpt. de Matemàtiques i Informàtica, Univ. de les Illes Balears  
toni.buades@uib.es, tomeu.coll@uib.es, morel@cmla.ens-cachan.fr

## Resumen

En 1955, Kovaszny and Joseph [2] propusieron realzar los detalles de una imagen ligeramente borrosa restándole una pequeña cantidad de su Laplaciano. Dennis Gabor [3] estudió este proceso y mostró que era equivalente a aplicar la ecuación de la calor inversa.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u, \quad u(0) = u_{observada}.$$

Como esta ecuación esta extremadamente mal puesta, este método solo puede iterarse algunos pasos antes que la ecuación explote. Desde entonces se han propuesto diversas modificaciones para estabilizar la ecuación o emularla mediante otra ecuacion en derivadas parciales: el filtro de choque de Osher-Rudin, las ecuaciones clasicas de reacción difusión, la ecuación de Perona-Malik o métodos variacionales como la minimización de la variación total.

Aunque pueda parecer paradójica, la deconvolución o realce esta fuertemente ligada a la capacidad de reducción de ruido. Esto se puede entender fácilmente en términos de frecuencias: un algoritmo de deconvolución intenta dividir en el dominio de frecuencias la imagen por la transformada del núcleo de convolución. Como las altas frecuencias del núcleo son pequeñas, estamos aumentando las altas frecuencias del ruido inherentes a la formación de la imagen. En este trabajo proponemos aplicar conjuntamente la ecuación de la calor inversa con el algoritmo de reducción de ruido NL-means [1]. Este algoritmo reemplaza el valor en cada punto por la media de los valores de los puntos con un entorno Gaussiano similar. La similitudes se calculan en la imagen observada y no para cada tiempo haciendo lineal el filtro,

$$NL_0 u(\mathbf{x}) = \frac{1}{C(\mathbf{x})} \int_{\Omega} w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (1)$$

with

$$w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{-\frac{(G_{\rho} * |u_0(\mathbf{x}+) - u_0(\mathbf{y}+)|^2)(0)}{h^2}}.$$

La ecuación de evolución propuesta se escribe como una estabilización no local de la ecuación de la calor inversa,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + \lambda NL_0 u, \quad (2)$$

donde  $\lambda$  juega un papel de balance entre el termino de filtraje y el termino de realce. Esta ecuación lineal se puede implementar por un esquema alternado siguiendo el principio de Chernoff. Un paso de la ecuación de la calor se alterna con un paso de regularización no local.

$$u_{n+1} = NL_0(u_n) - c * NL_0(\Delta u_n) = NL_0(u_n - c\Delta u_n) \quad (3)$$

Debe notarse que la ecuación propuesta y su implementación es *lineal*, contrariamente a las ecuaciones usualmente propuestas.

**Sección en el CEDYA 2007: OTROS TEMAS**

## Referencias

- [1] A. Buades, B. Coll and J.M. Morel, "A review of image denoising methods, with a new one", Multiscale Modeling and Simulation, vol 4 (2), pp 490-530, 2005.
- [2] L. S. G. Kovaszny and H. M. Joseph, "Image processing", Proc. IRE, 43 (1955), p. 560.
- [3] M. Lindenbaum, M. Fischer, and A. M. Bruckstein, "On gabor's contribution to image enhancement", Pattern Recognition, 27 (1994), pp. 1-8.

# Un esquema de volúmenes finitos de alto orden para las ecuaciones de aguas someras con topografía y áreas secas

J.M. GALLARDO, M. CASTRO, C. PARÉS

Dpto. Análisis Matemático, Universidad de Málaga

gallardo@anamat.cie.uma.es

## Resumen

Las ecuaciones de aguas someras son ampliamente utilizadas para modelizar flujos en ríos, embalses o zonas costeras, entre otras aplicaciones. En la forma considerada en este trabajo, dichas ecuaciones constituyen un sistema de leyes de conservación hiperbólicas con un término fuente debido a la topografía. Dicho sistema puede a su vez expresarse dentro del marco abstracto de los sistemas hiperbólicos no conservativos.

En los últimos años ha habido un creciente interés en el diseño de esquemas numéricos de alto orden para la resolución de las ecuaciones de aguas someras. Este tipo de esquemas aproximan las soluciones con alto orden de precisión (tanto en espacio como en tiempo) en las zonas donde son regulares, a la vez que capturan adecuadamente las posibles discontinuidades. Sin embargo, la aparición de un término fuente en las ecuaciones hace que los esquemas deban satisfacer además un balance entre el flujo y el término fuente para que las soluciones estacionarias o casi estacionarias se capturen de forma adecuada. Esta propiedad se conoce como *bien equilibrado*.

En [1] se desarrolló un esquema de volúmenes finitos de alto orden que es a la vez bien equilibrado, dentro de un marco no conservativo general. Dicho esquema utiliza reconstrucciones de estados y se apoya en el concepto de esquema de Roe generalizado (véase [4]). En particular, el esquema se aplicó para resolver las ecuaciones de aguas someras con topografía mediante reconstrucciones de tipo WENO de quinto orden.

Una dificultad que surge en la resolución numérica de flujos con superficie libre es la aparición de áreas secas, debidas a las condiciones iniciales o como resultado de la evolución del fluido. Los ejemplos son múltiples: inundaciones, roturas de presas, tsunamis, etc. Si no se realizan modificaciones adecuadas, los esquemas numéricos habituales pueden fallar ante la presencia de zonas secas; en la literatura pueden encontrarse diversos métodos que permiten solucionar este problema.

Recientemente, en [2] se ha introducido una nueva técnica para el tratamiento de zonas secas en el contexto de esquemas de Roe generalizados. La idea consiste en reemplazar, en aquellas intercel-das donde se detecta una transición seco-mojado, el problema de Riemann lineal correspondiente por un problema no lineal adecuado.

La idea principal del trabajo que presentamos consiste en combinar apropiadamente el esquema de alto orden desarrollado en [1] con la técnica para tratar áreas secas de [2]. Esta no es una tarea trivial, ya que surgen numerosas dificultades. En particular, los flujos numéricos han de modificarse según el tipo de transición seco-mojado que aparezca. Por otra parte, tanto las variables reconstruidas como el tipo de reconstrucción a utilizar han de elegirse de modo que se mantenga la propiedad de bien equilibrado y, al mismo tiempo, se preserve la positividad de la profundidad del agua. Para ello, se han considerado reconstrucciones de tipo hiperbólico ([3]) en detrimento de las de tipo polinomial, que son propensas a introducir oscilaciones espúreas.

Por último, presentamos también una extensión del esquema para flujos bidimensionales sobre mallas estructuradas, no necesariamente uniformes.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] M. Castro, J.M. Gallardo, C. Parés, *High order finite volume schemes based on reconstruction of states for solving hyperbolic systems with nonconservative products. Applications to shallow water systems*. Math. Comput. 75 (2006), 1103–1134
- [2] M. Castro, J.M. González, C. Parés, *Numerical treatment of wet/dry fronts in shallow flows with a modified Roe scheme*. Math. Mod. Meth. App. Sci. 16 (2006), 897–931.
- [3] A. Marquina, *Local piecewise hyperbolic reconstructions for nonlinear scalar conservations laws*. SIAM J. Sci. Comput. 15 (1995), 892–915.
- [4] C. Parés, M. Castro, *On the well-balanced property of Roe's method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to shallow water flows*. ESAIM: M2AN 38 (2004), 821–852.

# Resolución numérica de un problema de frontera libre asociado a inversiones con efectos medioambientales irreversibles

ÍÑIGO ARREGUI, CARLOS VÁZQUEZ

Dpto. de Matemáticas, Univ. de La Coruña

arregui@udc.es, carlosv@udc.es

ANTONIO ACCIÓN

I.E.S. Elviña

accion@edu.xunta.es

## Resumen

La irreversibilidad de algunas acciones sobre el medio ambiente es un factor a tener en cuenta a la hora de emprender ciertos proyectos de inversión. Este factor, junto con la opción para invertir dinero y la capacidad de aplazar una inversión (entre otros) juegan un papel muy importante a la hora de planificar una inversión [2].

J. I. Díaz y C. Faghloumi plantean en [3] un modelo matemático de tipo obstáculo que proporciona el beneficio agregado de cierto aspecto medioambiental y de un proyecto alternativo, considerando ambos como bienes económicos alternativos. En su análisis matemático, transforman el problema —planteado sobre un dominio infinito— en otro problema de frontera libre, de tipo obstáculo, planteado sobre un dominio acotado, y demuestran la existencia, unicidad y regularidad de la solución.

En el presente trabajo realizamos la simulación numérica del problema planteado en [3]. La presencia del obstáculo implica la aparición de una frontera libre, por lo que los métodos numéricos empleados deben estar adaptados a este tipo de problemas. Por otra parte, un refinamiento adaptativo permitiría aproximar con mejor precisión dicha frontera libre.

Para ello, nos basamos en trabajos previos ([1], [4]) que combinan métodos multimalla con distintos algoritmos (Gauss–Seidel con proyección, dualidad) propuestos para resolver problemas de tipo obstáculo. Presentamos algunos tests numéricos que resuelven problemas en una y dos dimensiones, comparando la eficacia de los distintos métodos.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] A. Brandt, C. W. Cryer, *Multigrid algorithms for the solution of linear complementarity problems arising from free boundary problems*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 4 (1983), 655-684.
- [2] A. K. Dixit, R. S. Pindyck, *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.
- [3] J. I. Díaz, C. Faghloumi, *Analysis of a degenerate obstacle problem on an unbounded set arising in the environment*, Appl. Math. Optim., 45 (2002), 251-267.
- [4] R. H. W. Hoppe, *Multigrid methods for variational inequalities*, SIAM J. Numer. Anal., 24 (1987), 1046-1065.

# Diferentes estados vorticales y sus conexiones en el flujo de Poiseuille plano bidimensional

PABLO S. CASAS

Depto. de Matemática Aplicada I, Univ. Politécnica de Cataluña

<http://www.ma1.upc.es/~casas>

## Resumen

En la familia de los flujos sencillos, el flujo de Poiseuille plano (FPP) es uno de los problemas clásicos. Es un problema de ensayo donde es posible evaluar diferentes métodos numéricos y analíticos, debido esencialmente a la simplicidad de su geometría. Los experimentos de algunos autores (véase [1, 2, 4]) motivan la idea de que las perturbaciones de amplitud finita originan la transición de flujo laminar a turbulento. Saffman [5] conjeturó que esta transición depende de estados vorticales intermedios, entre los cuales cabe mencionar: ondas viajeras, flujos secundarios y flujos cuasiperiódicos. La comprensión de la dinámica del FPP alrededor de los estados vorticales es el objeto de nuestro estudio.

Este trabajo es la continuación de otros sobre el FPP (véase [6, 3]). En [3] se obtuvo la variedad inestable de soluciones inestables, periódicas o cuasiperiódicas en tiempo, y la conexión entre las distintas configuraciones del fluido (laminar, periódico, cuasiperiódico o incluso conjuntos más extraños) a las que daba lugar la variedad inestable. Esas configuraciones fueron obtenidas por medio de continuación de curvas que emanaban de varias bifurcaciones de Hopf en el diagrama de amplitudes. El análisis sólo se llevó a cabo para dos valores típicos del número de onda  $\alpha$  ( $\alpha = 2\pi/L$ , siendo  $L$  la longitud periódica en la dirección de la corriente), a saber,  $\alpha = 1'02056, 1'1$ . Estos son dos valores especiales porque la solución laminar se inestabiliza al alcanzar el mínimo número de Reynolds ( $Re = 5772'22, \alpha = 1'02056$ ), y es estable a perturbaciones infinitesimales para cualquier  $Re$  ( $\alpha = 1'1$ ).

En la presente comunicación seguimos analizando la dinámica del FPP en dimensión 2 mediante métodos numéricos espectrales. Hemos mejorado el algoritmo numérico de continuación para acelerar los cálculos. Ello nos permite incrementar el número de modos espectrales y así obtenemos convergencia en el número y localización las de bifurcaciones de Hopf a soluciones más complejas. Asimismo consideramos un mayor conjunto de valores  $\alpha$ , moviendo  $Re$  en un rango moderado. Para  $\alpha \approx 0'92$  e inferiores, la bifurcación desde el flujo laminar cambia de subcrítica a supercrítica. Para estos  $\alpha$ , al variar  $Re$ , encontramos nuevos cambios de estabilidad en la curva de flujos periódicos, pero no aparecen nuevas ramas de soluciones bifurcadas. Al mismo tiempo hemos estudiado las ramas de soluciones cuasiperiódicas y las conexiones entre los diferentes estados del fluido. La variedad inestable de algunas soluciones está conectada con una nueva familia de flujos cuasiperiódicos, que resulta ser distinta de las encontradas por continuación de curvas.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] F. Alavyoon, D. S. Henningson, and P. H. Alfredsson. *Turbulent spots in plane Poiseuille flow – flow visualization*. Phys. Fluids, **29** (1986), 1328–1331.
- [2] D. R. Carlson, S. E. Widnall, and M. F. Peeters. *A flow visualization study of transition in plane Poiseuille flow*. J. Fluid Mech., **121** (1982), 487–505.
- [3] P. S. Casas and À. Jorba. *Unstable manifold computations for the two-dimensional plane Poiseuille flow*. Theor. Comput. Fluid Dyn., **18**(2–4) (2004), 285–299.
- [4] M. Nishioka and M. Asai. *Some observations of the subcritical transition in plane Poiseuille flow*. J. Fluid Mech., **150** (1985), 441–450.
- [5] P. G. Saffman. *Vortices, stability, and turbulence*. Ann. N. Y. Acad. Sci., **404** (1983), 12–24.
- [6] I. Soibelman and D. I. Meiron. *Finite-amplitude bifurcations in plane Poiseuille flow: two-dimensional Hopf bifurcation*. J. Fluid Mech., **229** (1991), 389–416.

# Un modelo de aguas someras con dependencia explícita de la profundidad

RAQUEL TABOADA VÁZQUEZ, JOSÉ MANUEL RODRÍGUEZ SEIJO  
 Dpto. de Métodos Matemáticos e de Representación, Univ. da Coruña  
 raqueltv@udc.es, mmrseijo@udc.es

## Resumen

En este trabajo, se obtiene un modelo de aguas someras partiendo de las ecuaciones de Euler bidimensionales y considerando un dominio en el que la profundidad es pequeña comparada con su largo (podría tratarse de un canal o un río). Esto nos permite introducir un pequeño parámetro adimensional,  $\varepsilon$ , que representa el cociente entre la profundidad y el largo característicos. Se realiza un cambio de variable a un dominio de referencia independiente del parámetro  $\varepsilon$  y del tiempo (es decir, la dependencia del parámetro pasa del dominio a las funciones). A continuación, se emplea la técnica de los desarrollos asintóticos para estudiar lo que sucede cuando  $\varepsilon$  se hace pequeño, es decir, se supone que la solución del problema en el dominio de referencia admite un desarrollo en serie de potencias de  $\varepsilon$  y se sustituyen los desarrollos en las ecuaciones obtenidas tras el cambio de variable, se identifican los términos multiplicados por la misma potencia de  $\varepsilon$  y luego se emplean las ecuaciones obtenidas para determinarlos. Finalmente se construye una aproximación de la solución en el dominio de referencia tomando únicamente los primeros términos del desarrollo asintótico y, deshaciendo el cambio de variable, obtenemos un modelo en el dominio original.

Para la obtención de este modelo no se ha aplicado el análisis asintótico, como se hace en general en el caso de fluidos, en el dominio original (véase, por ejemplo, [3]), que en este caso depende del parámetro  $\varepsilon$  y del tiempo  $t^\varepsilon$ , ni se ha supuesto que la superficie es constante (véase, por ejemplo, [1]), se ha preferido seguir las técnicas habituales en análisis asintótico aplicado a sólidos (véase [2] y las referencias en ellos señaladas).

El modelo así obtenido es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + \frac{\partial(\bar{u}^\varepsilon h^\varepsilon)}{\partial x^\varepsilon} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + \bar{u}^\varepsilon \frac{\partial \bar{u}^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_s^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} - \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} g \\ p^\varepsilon &= p_s^\varepsilon + \rho_0 g (s^\varepsilon - z^\varepsilon) \\ \frac{\partial \gamma^{0,i,\varepsilon}}{\partial t^\varepsilon} + \bar{u}^\varepsilon \frac{\partial \gamma^{0,i,\varepsilon}}{\partial x^\varepsilon} &= 0 \quad i = 0, 1, \dots, k \\ u^\varepsilon &= \bar{u}^\varepsilon + \sum_{i=0}^k \left( \frac{(z^\varepsilon - H^\varepsilon)^{i+1}}{(i+1)(h^\varepsilon)^i} - \frac{h^\varepsilon}{(i+1)(i+2)} \right) \gamma^{0,i,\varepsilon} \\ w^\varepsilon &= u^\varepsilon \frac{\partial H^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} (z^\varepsilon - H^\varepsilon) \end{aligned}$$

donde  $h^\varepsilon$  es la profundidad del agua,  $\bar{u}^\varepsilon$  es velocidad horizontal media,  $p_s^\varepsilon$  es la presión atmosférica,  $z^\varepsilon = s^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon)$  ecuación de la superficie del agua,  $z^\varepsilon = H^\varepsilon(x^\varepsilon)$  ecuación del fondo del dominio,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $p^\varepsilon$  es la presión,  $\rho_0$  es la densidad del fluido,

$\gamma^{0,\varepsilon} = \sum_{i=0}^k \gamma^{0,i,\varepsilon} \left( \frac{z^\varepsilon - H^\varepsilon}{h^\varepsilon} \right)^i$  es la vorticidad,  $u^\varepsilon$  es la componente horizontal de la velocidad,  $w^\varepsilon$  es la componente vertical de la velocidad.

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia mediante el proyecto MTM2006-14491.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] P. Azérad, F. Guillén, *Mathematical justification of the hydrostatic approximation in the primitive equations of geophysical fluid dynamics*, Siam J. Math. Anal., **33**(4), (2001), 847-859 .
- [2] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity. Volume II: Theory of Plates*, North-Holland, Amsterdam, 1997.
- [3] J.-F. Gerbeau, B. Perthame, *Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water; numerical validation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, **1**(1), (2001), 89-102.
- [4] R. Taboada-Vázquez, *Tesis Doctoral*, Universidade da Coruña, 2006.

# Efficient resolution of singularly perturbed coupled systems: Equations of reaction-diffusion type<sup>1</sup>

C. CLAVERO, J.L. GRACIA, F.LISBONA, C. RODRIGO

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Zaragoza

clavero@unizar.es, jlgracia@unizar.es, lisbona@unizar.es, crodrigo@unizar.es

## Resumen

In this talk we are interested in a class of singularly perturbed linear system of reaction-diffusion type, coupled in the reaction terms, where the positive diffusion parameters in each equation can be different and also they can take very small values. The presence of these diffusion parameters cause that, in general, the exact solution of the continuous problem has boundary layers at the ends of the spatial domain. Examples of this type of problems appear in some areas; by instance, in the study of the flow in the porous material and in the fractured system (Barenblatt system), in the modelization of diffusion process in bones, considered as a multiple porosity medium, in turbulent interactions of waves and currents or in diffusion process in electroanalytic chemistry.

To find a good approximation of the solution it is necessary to use numerical methods giving convergence to the exact solution independently of the values of the diffusion parameters; this type of methods are called uniformly convergent methods. For the construction and the analysis of the uniform convergence of this type of methods, it is convenient to dispose of appropriate information about the asymptotic behaviour of the exact solution and its partial derivatives with respect to the diffusion parameters. For singularly perturbed coupled systems, some results in this way can be found in [3, 4] for the steady case and in [1, 2] for the evolutionary case.

We display some numerical experiments illustrating in practice the theoretical results. From these examples we can see both the uniform convergence of the numerical method and also the efficiency of different strategies to solve the linear systems resulting from the numerical discretization.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] C. Clavero, J.L. Gracia, F. Lisbona, Time dependent singularly perturbed coupled reaction-diffusion systems: a high accurate uniformly convergent method, Submitted
- [2] J.L. Gracia, F. Lisbona, A uniformly convergent scheme for a system of reaction-diffusion equations, To appear in J. Comp. Appl. Math.
- [3] N. Madden, M. Stynes, *A uniformly convergent numerical method for a coupled system of two singularly perturbed linear reaction-diffusion problems*, IMA J. Numer. Anal., **23** (2003) 627–644.
- [4] T. Linß, N. Madden, Accurate solution of a system of coupled singularly perturbed reaction-diffusion equations, Computing, **73** (2004) 121–133.

---

<sup>1</sup>This research was partially supported by the project MEC/FEDER MTM2004-01905 and the Diputación General de Aragón.

# Simulación numérica de la combustión de carbón pulverizado

A. BERMÚDEZ DE CASTRO, J.L. FERRÍN, L. SAAVEDRA

Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Santiago de Compostela

laurasl@usc.es

A. LIÑÁN

E.T.S. Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid

## Resumen

El objetivo de esta comunicación es presentar un modelo matemático de la combustión de carbón pulverizado y el correspondiente algoritmo para su resolución.

El modelo de combustión desarrollado, que consta de dos fases acopladas, está formado por ecuaciones en derivadas parciales, ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones numéricas. Para el modelo de la fase gaseosa se utiliza una descripción euleriana, mientras que para el modelo de la fase sólida se utiliza una descripción lagrangiana.

En primer lugar se tratará la derivación del modelo, mientras que en la segunda parte se propondrán los métodos numéricos para su resolución y se mostrarán las soluciones obtenidas para diferentes problemas.

El nuevo modelo de combustión se va a incorporar al programa SC3D (Simulación de Calderas en 3 dimensiones) desarrollado en Ferrín [1]. Se trata de un programa de CFD (Mecánica de Fluidos Computacional) adaptado para la simulación de la zona del hogar de una caldera de carbón pulverizado utilizada en una Central Térmica. Este modelo, que ha sido desarrollado en Bermúdez *et al.* [2], trata los procesos simultáneos de evaporación de la humedad y la devolatilización, junto con las reacciones heterogéneas de gasificación del “char”, que ocurren durante la combustión de una partícula de carbón en una caldera de carbón pulverizado. En este modelo, el análisis de Burke-Schumann se ha generalizado para tener en cuenta la competición por el oxígeno entre las especies combustibles.

Los dos modelos que presentamos se encuentran acoplados. Este acoplamiento se debe a las fuentes que aporta la fase discreta a las ecuaciones de conservación de masa y energía del modelo para la fase gaseosa y a que la fase gaseosa determina cómo se mueve y la atmósfera en la que se quema la partícula.

Una primera aproximación de la resolución del problema acoplado se ha realizado en [3].

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] José Luis Ferrín González. Algunas contribuciones a la modelización matemática de procesos de combustión de carbón. Tesis. Universidad de Santiago de Compostela, 1999.
- [2] A. Bermúdez de Castro, J. L. Ferrín y A. Liñán. The modelling of the generation of volatiles,  $H_2$  and  $CO$ , and their simultaneous diffusion controlled oxidation, in pulverised furnaces.
- [3] Laura Saavedra Lago. Simulación numérica de la combustión de partículas de carbón y simulación numérica en Mecánica de Fluidos. Trabajo de Investigación Tutelado. Universidad de Santiago de Compostela, 2006.

# Un método de elementos finitos mixtos para un problema de interacción sólido–fluido

ANTONIO MÁRQUEZ

Dpto. de Construcción, Univ. de Oviedo, Campus de Viesques, 33203 Gijón

amarquez@uniovi.es

SALIM MEDDAHI

Dpto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Univ. de Oviedo, Calvo Sotelo s/n, 33007 Oviedo

salim@uniovi.es

GABRIEL N. GATICA

Dpto. de Ingeniería Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Univ. de Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile

ggatica@ing-mat.udec.cl

## Resumen

En este trabajo consideramos un sólido elástico lineal e isótropo, rodeado de un fluido perfecto compresible, sobre el que incide una onda acústica armónica. Nuestro propósito es presentar un esquema numérico para determinar tanto la respuesta en el sólido como la distribución de ondas acústicas en el fluido linealizado. En el sólido utilizamos una formulación variacional mixta de la que, posteriormente, eliminamos el campo de desplazamientos. Así, las únicas incógnitas en el sólido serán los campos de tensiones y de rotaciones. Esta formulación mixta se acopla, mediante dos condiciones de transmisión (una de equilibrio y otra de continuidad) sobre la frontera húmeda, con la ecuación de Helmholtz que satisface la presión sobre el medio acústico. Para definir el correspondiente esquema discreto utilizamos elementos PEERS en el sólido y elementos finitos de Lagrange de primer orden en el dominio acústico. Finalmente, ilustramos las propiedades de convergencia del esquema propuesto con algunos experimentos numéricos.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN



# COMUNICACIONES

*Miércoles 26*



# Convergence to equilibrium for a hyperbolic/elliptic system modelling the elastic-gravitational deformation of a layered Earth

A. ARJONA

Instituto de Astronomía y Geodesia, Univ. Complutense de Madrid

alicia\_arjona@mat.ucm.es

J. I. DÍAZ

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Complutense de Madrid

jidiaz@mat.ucm.es

## Resumen

In this communication we prove the stabilization, as  $t$  goes to infinity, of a model (which is an adaptation of the one posed by A. E. H. Love in 1911) for the study of the displacements due to internal sources of strain in layered linear elastic-gravitational continua. The coupled model of deformation and the variation of the gravity is the following system of partial differential equations:

$$\begin{cases} \rho \mathbf{u}_{tt} - \gamma \Delta \mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}) - \frac{\rho g}{\mu} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z) + \frac{\rho g}{\mu} \mathbf{e}_z \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\rho}{\mu} \nabla \phi + \mathbf{f}_u, \\ -\Delta \phi = 4\pi \rho G \operatorname{div} \mathbf{u} + f_\phi, \end{cases}$$

where  $\mathbf{u}$  denotes the displacement,  $\nu$  the Poisson's ratio,  $\rho$  the unperturbed density of the medium,  $g$  the externally imposed gravitational acceleration,  $\mu$  is the rigidity and  $\mathbf{e}_z$  is the unit vector pointing in the positive  $z$ -direction (down into the medium).

We consider a spatial domain of the type as shown in Figure 1. The elastic constants and the density of the  $n$ th layer are denoted by  $\lambda_n$ ,  $\mu_n$  and  $\rho_n$ . Each layer has thickness  $d_n$ . We construct a cylindrical coordinate system with the origin at the surface and with the  $z$  axis pointing down into the medium. The lower boundary of the  $n$ th layer is designated by  $z_n$  and the depth to the half space by  $z_p$ .

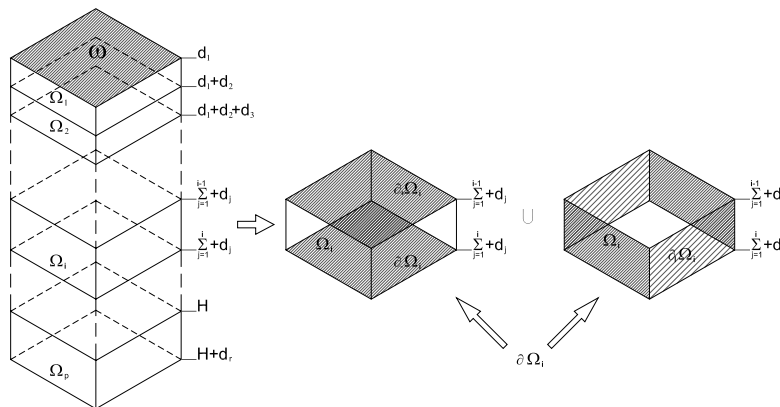


Figure 1. Layered Earth model. Illustration of the coordinate system and variation of the layer properties with depth.

The existence and uniqueness of weak solutions has been obtained recently in two different joint works by Arjona, Díaz, Fernández and Rundle (see also the DEA report by the first author at the UCM in July 2006). Here we prove that, under some additional conditions on the data, the difference of the respective solutions converges to zero, as  $t$  goes to infinity, in a suitable functional space. Our proof uses a reformulation of the hyperbolic/elliptic system in terms of a nonlocal hyperbolic system leading to a dynamical system to which we apply the La Salle invariance principle for a Lyapunov function involving the nonlocal terms.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

# An extinction delay mechanism for abstract semilinear equations

A.C. CASAL

Dept. de Matemática Aplicada, E.T.S. Arquitectura,  
Univ. Politécnica de Madrid, 28040 Madrid, SPAIN

alfonso.casal@upm.es

J.I. DÍAZ, J.M. VEGAS

Dept. de Matemática Aplicada, Fac. de Matemáticas,  
Univ. Complutense de Madrid, 28040 Madrid, SPAIN

ji.diaz@mat.ucm.es, jm\_vegas@mat.ucm.es

## Resumen

We consider the abstract semilinear problem

$$(ASP) \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + F(u) = G(t, u_t) & t \in (0, T), \\ u(s) = u_0(s) & s \in (-\tau, 0), \end{cases}$$

where  $T > 0$ ,  $A : D(A) \rightarrow X$  is a linear  $m$ -accretive operator on a Banach space  $X$ ,  $F : X \rightarrow X$  is a  $C^1$  function and  $G : [0, T) \times C([-\tau, 0] : X) \rightarrow X$  is a suitable delayed action, where  $u_t(s, \cdot) := u(t + s, \cdot)$  for  $s \in [-\tau, 0]$ .

We make use of a nonlinear variation of constants formula (the Alekseev formula) to show that given  $\tau \in (0, T/2]$ ,  $A$  and  $F$ , for any initial datum  $u_0(s)$  (in fact we only need to know the value at time  $s = 0$ ,  $u_0(0)$ ) there exists a delayed action  $G(t, u_t)$  such that the solution of  $(ASP)$  becomes extinct after the time  $2\tau$ , i.e.  $u(t) = 0$  in  $X$  for any  $t \geq 2\tau$ .

We also show that in the linear case ( $F(u) \equiv 0$ ) the conclusion holds when the delayed action is taken (independently of the initial datum  $u_0(s)$ ) of the form  $G(t, u_t) = -b(t)u_t(\tau, \cdot)$  for a suitable real function  $b(t)$  which becomes extinct after  $2\tau$  (typical of switched controls),  $b(t)$  being inactive (i.e. zero) on  $[0, \tau]$  and satisfying that  $1 = \int_{\tau}^{2\tau} b(s)ds$ .

We recall that, in contrast with most of the previous “finite extinction results” for parabolic reaction-diffusion equations (where usually it is required that  $F$  be a non Lipschitz nonlinear term and  $G(t, u_t) \equiv 0$ ), the term  $F(u)$  is assumed here to be a smooth function.

The results generalize a previous work by the authors (to appear in DYNAMICS OF CONTINUOUS, DISCRETE AND IMPULSIVE SYSTEMS (Series A)) dealing with linear scalar parabolic equations. By taking suitable choices of the Banach space  $X$ , of the operator  $A$  and function  $F$ , we apply here the abstract result to some other models such as, for instance, the case of general linear abstract equations and some nonlinear damped hyperbolic equations, to mention only two of the many possible applications.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

# Un modelo de tipo Grad-Shafranov para plasmas con simetría helicoidal

J.F. PADIAL

Dpto. de Matemática Aplicada, E.T.S. Arquitectura. Univ. Politécnica de Madrid

jf.padial@upm.es

J.I. DÍAZ

Dpto. de Matemática Aplicada, F. Matemáticas. Univ. Complutense de Madrid

diaz.racefyn@insde.es

## Resumen

Uno de los problemas más importantes de la fusión termonuclear controlada mediante confinamiento magnético es la detección de las condiciones bajo las cuales el plasma puede ser confinado magnéticamente sin tocar las paredes de la cámara de vacío. Tal fin se logra mediante una de las dos estrategias siguientes: (a) se induce un campo magnético invariante bajo rotaciones en torno a un eje de simetría (es la *simetría axial* típica de máquinas de tipo Tokamak), o, (b) se disponen las bobinas magnéticas de manera que las líneas de campo se envuelvan *casi* helicoidalmente en torno a una curva o *eje magnético* (es la *geometría axisimétrica* típica de máquinas de tipo Stellarator). Con la palabra *casi* queremos expresar que el radio de curvatura de la hipotética hélice no necesita permanecer constante y que el eje tampoco necesita ser una recta.

Las ecuaciones 3-D que gobiernan el equilibrio del plasma (supuesto, a escala macroscópica, dado por un fluido ideal) en una máquina de tipo Stellarator son, de un lado, las ecuaciones de Maxwell y, de otro, la ecuación de equilibrio fluido-dinámico. Sin embargo, mediante la consideración de adecuadas coordenadas (de Boozer  $(\rho, \rho\theta, \phi)$ ), Hender y Carreras obtuvieron, en 1984, un modelo 2-D al suponer ciertos órdenes de magnitud y aplicar un proceso de promedios. Se llega así a una ecuación de tipo *Grad-Shafranov* para la función de flujo promediado en la componente  $\phi$  que es un problema elíptico inverso no lineal y de frontera libre: hallar funciones  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  tales que

$$(P) \begin{cases} -\mathcal{L}u = aF(u) + F(u)F'(u) + bp'(u) & \text{en } \Omega, \\ u = \gamma & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde  $\mathcal{L}$  es un operador lineal elíptico de segundo orden,  $\gamma \leq 0$  y  $a$  y  $b$  son funciones regulares dadas en términos de la métrica asociada. La función  $p(u(x))$  representa la presión y obedece a una cierta ley constitutiva (del tipo de  $p(t) = \frac{\lambda}{2} \max\{t, 0\}$  con  $\lambda > 0$ ). La función incógnita  $u$  representa el flujo poloidal promediado y  $F(u) \geq 0$  es la coordenada contravariante toroidal del campo magnético. Se sabe que en la región de vacío  $F(t) = F_v \forall t \leq 0$ . A las ecuaciones anteriores hay que añadir la condición típica de máquinas Stellarator que expresa que la corriente total en el interior de cada superficie magnética es nula,  $\int_{\{u>t\}} [F(u)F'(u) + p'(u)b] = 0$  para todo  $t \in [ess\inf_{\Omega} u, ess\sup_{\Omega} u]$  (la existencia de soluciones fue mostrada en Díaz, Padial, Rakotoson 1998).

El objetivo de esta comunicación es proponer un sencillo modelo en el que la geometría del campo magnético presenta una *simetría helicoidal total*. Mostramos que el problema 3-D se puede reducir a un problema 2-D (similar a  $(P)$ ) pero ahora sin necesidad de utilizar coordenadas de tipo Boozer ni de aplicar métodos de promedios. Obtenemos la expresión explícita de los coeficientes  $a$  y  $b$  y analizamos la resolución del problema inverso asociado.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] A.H. Boozer, "Establishment of Magnetic Coordinates for a given Magnetic Field". *Phys. Fluids*, **25**, n. 3, March 1982.
- [2] T.C. Hender, B.A. Carreras, "Equilibrium calculations for helical axis Stellarators". *Phys. Fluids* **27** (1984), 2101.
- [3] J. I. Díaz, J. F. Padial and J. M. Rakotoson, "Mathematical treatment of the magnetic confinement in a current-carrying Stellarator", *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* **34** (1998), 857–887.

# Desigualdades variacionales casilineales elípticas con crecimiento natural en el gradiente

PEDRO J. MARTÍNEZ-APARICIO, DAVID ARCOYA

Dpto. de Análisis Matemático, Univ. de Granada

pedrojma@ugr.es, darcoya@ugr.es

JOSÉ CARMONA

Dpto. de Álgebra y Análisis Matemático, Univ. de Almería

jcarmona@ual.es

## Resumen

Sean  $\Omega$  un conjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ),  $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$  ( $p > N$ ) de manera que  $\psi^+ \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  y  $a \in L^q(\Omega)$  con  $q > N/2$  satisfaciendo  $\text{ess inf } \{a(x) / x \in \omega\} > 0$ ,  $\forall \omega \subset\subset \Omega$ . Estudiamos [1] la existencia de solución positiva  $w \in H_0^1(\Omega)$  de la desigualdad variacional

$$\left. \begin{aligned} w(x) &\geq \psi(x) \text{ a.e. } x \in \Omega \\ g(w)|\nabla w|^2 &\in L_{\text{loc}}^1(\Omega), \quad g(w)|\nabla w|^2(w - \psi^+) \in L^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla w \nabla(v - w) + \int_{\Omega} g(w)|\nabla w|^2(v - w) &\geq \int_{\Omega} a(x)(v - w), \quad \forall v \in K \end{aligned} \right\}$$

donde

$$K \equiv \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : \begin{array}{l} v(x) \geq \psi(x) \text{ a.e. } x \in \Omega \\ \text{supp}(v - \psi^+) \subset\subset \Omega \end{array} \right\},$$

y  $g : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  satisface  $\limsup_{s \rightarrow 0} sg(s) < +\infty$ . El modelo básico de no linealidad singular  $g$  que nos interesa es  $g(s) = 1/s$ . Para el conocimiento de los autores, el caso de no linealidades  $g$  con singularidad en  $s = 0$  no ha sido tratada en la literatura. Mencionamos que el caso de términos  $g$  no singulares ha sido estudiado en [3, 4, 5]. Como corolario mejoramos el resultado de existencia [2] de solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta w + g(w)|\nabla w|^2 &= a(x), \quad x \in \Omega \\ w &\in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] D. Arcoya, J. Carmona and P.J. Martínez-Aparicio, *Elliptic obstacle problems with natural growth on the gradient and singular nonlinear terms*, *Adv. Nonlinear Stud.*, to appear.
- [2] D. Arcoya and P.J. Martínez-Aparicio, *Quasilinear equations with natural growth*, *Rev. Mat. Iberoamericana*, to appear.
- [3] A. Bensoussan, L. Boccardo and F. Murat. *On a non linear partial differential equation having natural growth terms and unbounded solution*. *Ann. Inst. Henri Poincaré*. 5 (1988), 347–364.
- [4] L. Boccardo, F. Murat and J. P. Puel. *Existence de solutions faibles pour des équations elliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique*, *Nonlinear partial differential equations and their applications*, Collège de France Seminar, vol. IV, ed. by H. Brezis and J.L. Lions, *Research Notes in Mathematics*. **84**, 1983, 19–73.
- [5] J.M. Rakotoson and R. Temam. *Relative rearrangement in quasilinear elliptic variational inequalities*, *Indiana Univ. Math. J.* 36 (1987), 757–810.

## Un modelo para la descripción de las transiciones de fases en una barra de acero

J. M. DÍAZ MORENO, C. GARCÍA VÁZQUEZ, M. T. GONZÁLEZ MONTESINOS,  
F. ORTEGÓN GALLEGO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

josemanuel.diaz@uca.es, concepcion.garcia@uca.es, mariateresa.gonzalez@uca.es,  
francisco.ortegon@uca.es

### Resumen

El acero es una aleación de hierro y carbono al que se pueden unir una serie de elementos aleantes (Si, Mn, Ni, Cr, Al, . . .). La cantidad de cada uno de ellos determina las propiedades del material y, por tanto, sus usos y aplicaciones industriales.

En los aceros eutectoides (con un nivel de C en torno al 0'77%), se aprecia un cambio significativo en su estructura cristalina en un rango de temperaturas entre los 727°C y los 1300°C, aproximadamente. A partir de este proceso de *austenización*, tras un enfriamiento "brusco" aparecen nuevas fases: perlita, bainita y, fundamentalmente, martensita. Las propiedades físicas asociadas a cada una de ellas resultan cualitativamente diferentes: la martensita presenta un nivel de dureza superior a las demás fases pero tiene el inconveniente de ser frágil; por contra, la perlita es dúctil.

Tradicionalmente se manejan esquemas (*diagramas de fases*), determinados de modo experimental, que describen todas estas transformaciones.

En el proceso de fabricación de una cremallera de dirección (para automóviles, por ejemplo) se parte de un cilindro dentado de acero. Para que cumpla las condiciones que su uso le va a exigir, interesa dotar superficialmente la zona dentada de un mayor nivel de dureza, manteniendo la ductilidad en el resto de la pieza. Para ello, se somete la barra a un proceso de calentamiento por conducción e inducción seguido de un enfriamiento brusco, mediante una *ducha* de agua. El objetivo es conseguir que aparezca martensita en la parte de los dientes.

En este trabajo presentamos un modelo para las transiciones de fases en el acero con la geometría asociada a la barra de dirección. Se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en las que la temperatura será considerada inicialmente un dato, de acuerdo a un perfil de temperatura previamente fijado.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN, OTROS TEMAS (Modelos y procesos industriales)

# El modelo BGK con potencial confinante: existencia, comportamiento asintótico y equilibrios Maxwellianos periódicos en tiempo

ROBERTA BOSI

Inst. Analysis und Scientific Computing, TU Wien, Austria  
bosi@aurora.anum.tuwien.ac.at

MARÍA J. CÁCERES

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Granada  
caceresg@ugr.es

## Resumen

En este trabajo [1] estudiamos la existencia, estabilidad y comportamiento asintótico de la ecuación no lineal y no homogénea de Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) en presencia de un potencial externo  $\phi$ :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi \cdot \nabla_v f = M[f] - f, \quad (1)$$

donde  $M[f]$  es la *Maxwelliana local*

$$M[f](t, x, v) = \frac{\rho(t, x)}{(2\pi T(t, x))^{N/2}} \exp\left(-\frac{|v - u(t, x)|^2}{2T(t, x)}\right) \quad (2)$$

definida en términos de los momentos en velocidad de  $f$ : la densidad espacial  $\rho$ , la velocidad media  $u$  y la temperatura  $T$  dados por  $(\rho, \rho u, \rho|u|^2 + \rho TN) = \int_{\mathbb{R}^N} (1, v, |v|^2) f(t, x, v) dv$ . El potencial externo  $\phi = \phi(x)$  satisface las siguientes hipótesis:

$$\phi(x) \geq 0, \quad \phi \in C^2(\mathbb{R}^N), \quad \exp(-\phi(x)) \in L^1(\mathbb{R}^N), \quad (3)$$

$$|x| |\nabla \phi(x)| \leq c_1(1 + \phi(x)), \quad |\nabla \phi(x)|(1 + |v|^\sigma) \leq c_2(1 + |v|^2 + 2\phi(x)), \quad (4)$$

para algún  $\sigma \in (0, 1]$  y  $c_1, c_2 \in (0, +\infty)$ . Esta ecuación modela la dinámica cinética de un gas (ver [2]), la presencia del potencial  $\phi$  permite confinar las partículas y la existencia de estados de equilibrio no triviales con masa y energía finitas.

Para un dato inicial  $f_0 \geq 0$  con masa, entropía y energía total finitas probamos la existencia de soluciones integrales (*mild*) en  $L^1$ , empleando argumentos de compacidad. Para ello seguimos la aproximación de Perthame [4], donde la dificultad en nuestro caso radica en el control de los momentos de orden alto en función de los de orden menor.

Cuando el tiempo tiende a infinito probamos que el sistema se relaja hacia una distribución Maxwelliana. Este fenómeno era conocido para el caso de dominios acotados (ver [3]).

Aplicando las técnicas de compacidad del resultado de existencia, mostramos que cuando  $t_n \rightarrow \infty$  se tiene convergencia en  $C([0, \tau]; L^1(\mathbb{R}^{2N}))$  de  $f(t + t_n, x, v)$  hacia un estado Maxwelliano con la misma masa que el dato inicial y con energía y entropía acotadas.

Un caso particularmente interesante lo encontramos considerando el potencial armónico, es decir  $\phi(x) = |x|^2/2$ , porque aparece una familia de estados de equilibrio dependientes del tiempo de forma periódica. Todos los estados de esta familia son estables y su estabilidad puede ser estudiada considerando como funcional de Lyapunov la entropía relativa:  $H[f, g] = \int f \log(f/g) dx dv$ , que nos muestra también la estabilidad en términos de la norma  $L^1$ . Por otro lado, en esta familia de estados estables hay un único estado estacionario (es decir, independiente del tiempo) para el cual la entropía es mínima. Cabe preguntarse si el sistema se relajará hasta este estado estacionario. La presencia de los otros estados de equilibrio no nos garantiza la relajación hacia el estado estacionario. En esta dirección, encontramos condiciones necesarias sobre el dato inicial para esperar convergencia hacia el estado estacionario, en términos de la entropía.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] R. Bosi, M. J. Cáceres, *The BGK model with external confining potential: Existence, long-time behaviour and time-periodic Maxwellian equilibria*, prepublicación Universität Münster "Angewandte Mathematik und Informatik" 02/06-N, (2006).
- [2] C. Cercignani, *The Boltzmann equation and its applications*, Springer, 1988.
- [3] L. Desvillettes, *Convergence to equilibrium in large time for Boltzmann and B.G.K. equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 110, 1 (1990), 73-91.
- [4] B. Perthame, *Global existence to the BGK model of Boltzmann equation*, J. Differential Equations, 82, (1989), 191-205.



# Un problema de frontera libre para fluidos No-Newtonianos y aplicación al movimiento de glaciares

MARCO A. FONTELOS

Dpto. de Matemáticas, Univ. Autónoma de Madrid

marco.fontelos@uam.es

ANA I. MUÑOZ, EMANUELE SCHIAVI

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Rey Juan Carlos, Madrid

anaisabel.munoz@urjc.es, emanuele.schiavi@urjc.es

## Resumen

Estudiamos la existencia de soluciones para un problema de frontera libre definido en un dominio bidimensional  $S$  en el que se satisfacen las ecuaciones para fluidos No-Newtonianos del tipo ley de potencias:

$$\nabla \cdot T = 0, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ en } S, \quad (1)$$

con  $T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu D_{ij}$ ,  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  y  $\vec{v} = (u, w)$ . La viscosidad  $\mu$  depende de los esfuerzos  $D$  en la siguiente forma

$$\mu(|D|) = C|D|^{\frac{1}{n}-1}, \quad |D| = \sqrt{2D : D} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2}$$

siendo  $n > 1$  un exponente que depende de la reología del fluido y, que en caso del hielo, se suele tomar del orden de 3. En 3 de los 4 tramos del borde de  $S$  se satisfacen condiciones de entrada y salida de flujo o condiciones de no deslizamiento (velocidad cero) o condiciones de esfuerzos y velocidades normales nulos. En el último tramo, que es la frontera libre, se satisface una condición de equilibrio entre los esfuerzos y una función dependiente de la geometría de la frontera (representando la presión hidrostática del agua). Además, se verifica una condición cinemática extra que sobredetermina la ecuación en derivadas parciales y obliga escoger la frontera libre de forma adecuada. La estrategia de resolución del problema consiste en formular variacionalmente el sistema (1), obteniendo así soluciones débiles para la velocidad, en  $\left[ W^{1,1+\frac{1}{n}}(S) \right]^2$  y resolver con ellas la condición cinemática para determinar la frontera libre mediante un esquema iterativo. A continuación demostramos regularidad adicional de las soluciones para determinar que la frontera libre es, de hecho,  $C^{1+\frac{1}{n+1}}$ . Determinamos también el comportamiento del flujo en la línea de contacto de la frontera libre con el resto del flujo y presentaremos resultados numéricos obtenidos mediante elementos finitos.

**Sección en el CEDYA 2007: EDP**

## Referencias

M.A. Fontelos, A.I. Muñoz. *A free boundary problem in glaciology: The motion of grounding lines*. Interfaces and free boundaries. To appear.

M.A. Fontelos, A.I. Muñoz, E. Schiavi. *The ice flow behaviour in the neighborhood of the grounding line. Non newtonian case*. Preprint.

# La completación de matrices totalmente no negativas: una visión general

RAMADÁN EL-GHAMRY, CRISTINA JORDÁN, JUAN R. TORREGROSA

Depto. de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia

el\_ghamry@hotmail.com, cjordan@mat.upv.es, jr Torre@mat.upv.es

## Resumen

Una *matriz parcial* es una matriz en la cual algunas de sus entradas son especificadas y otras no. Cuando se le asignan valores a las entradas no especificadas, la matriz resultante recibe el nombre de *completación* de la matriz parcial. En un *problema de completación* nos planteamos bajo qué condiciones podemos obtener una completación de una matriz parcial con algunas propiedades preestablecidas. Una matriz parcial  $A = (a_{ij})$  se dice que es *posicionalmente simétrica* cuando  $a_{ij}$  es especificada si y sólo si  $a_{ji}$  lo es. En caso contrario se dice que la matriz parcial es no posicionalmente simétrica.

Una forma natural de describir una matriz parcial  $A = (a_{ij})$ , de tamaño  $n \times n$ , es mediante un grafo  $G_A = (V, E)$ , donde el conjunto de vértices  $V$  es  $\{1, 2, \dots, n\}$  y existe una arista o arco del vértice  $i$  al vértice  $j$  si y sólo si la posición  $(i, j)$  de  $A$  es especificada. En general, cuando la matriz parcial es posicionalmente simétrica el grafo asociado es no dirigido, siendo dirigido en caso contrario.

Una matriz real de tamaño  $n \times n$  se dice que es una matriz *totalmente no negativa* si todos sus menores son no negativos. Estas matrices aparecen con frecuencia en teoría de aproximación, estadística, economía, diseño gráfico asistido por ordenador, etc. Una visión general de este tipo de matrices y sus aplicaciones podemos encontrarla en [1] y [5].

Una matriz parcial decimos que es una *matriz parcial totalmente no negativa* si cualquier submatriz completamente especificada es totalmente no negativa. El problema de completación objeto de este trabajo es el siguiente:

*Dada una matriz parcial totalmente no negativa  $A$ , de tamaño  $n \times n$ , ¿existe una completación  $A_c$  de  $A$  que sea matriz totalmente no negativa?*

Este problema fué estudiado inicialmente por Johnson, Kroschel y Lundquist en [3] y posteriormente por Jordán y Torregrosa en [4]. Actualmente, el-Ghamry en su tesis doctoral [2], muestra el estado general del problema con los nuevos resultados obtenidos. Este trabajo es un resumen de dicha tesis, en el cual completamos los estudios anteriores analizando el problema de completación tanto para grafos dirigidos como no dirigidos.

Teniendo en cuenta que el concepto de total no negatividad no se hereda por semejanza de permutación, debemos trabajar con grafos etiquetados, es decir, grafos en los que la numeración de los vértices está fijada. En nuestro estudio vamos a distinguir entre grafos monótona y no monótonamente etiquetados.

El problema de completación que nos ocupa tiene, en general, respuesta negativa. Presentamos en esta comunicación, además de la situación actual del problema, algunos resultados en el caso de grafos no dirigidos, y también condiciones necesarias y suficientes para la existencia, en este contexto, de una completación totalmente no negativa en los casos de grafos dirigidos: caminos, caminos totalmente especificados, doble-caminos, ciclos y block ciclos.

**Sección en el CEDYA 2007: OTROS TEMAS**

## Referencias

- [1] T. Ando, *Totally positive matrices*, Linear Algebra and its Applications, **90** (1987), 165-219.
- [2] Ramadán el-Ghamry, *El problema de completación de matrices parciales*, Tesis doctoral, Depto. de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, (en curso).
- [3] C.R. Johnson; B.K. Kroschel; M. Lundquist, *The Totally Nonnegative Completion Problem*, Fields Institute Communications, American Mathematical Society, Providence, RI **38** (1998), 97-109.
- [4] C. Jordán; J.R. Torregrosa, *The Totally Positive Completion Problem*, Linear Algebra and its Applications **393** (2004), 259-274.
- [5] S. Karlin, "Totally positive matrices", Stanford University Press, Stanford 1968.

## Low rank perturbation of Kronecker structure

FERNANDO DE TERÁN, FROILÁN M. DOPICO, JULIO MORO

Dpto. de Matemáticas, Univ. Carlos III de Madrid

fteran@math.uc3m.es, dopico@math.uc3m.es, jmoro@math.uc3m.es

### Resumen

Let  $\mathcal{L}(\lambda)$  be a  $m \times n$  singular matrix pencil. When we perturb  $\mathcal{L}(\lambda)$  additively by another singular matrix pencil,  $\mathcal{M}(\lambda)$ , satisfying  $\text{rank}(\mathcal{L}) + \text{rank}(\mathcal{M}) < \min\{m, n\}$ , the perturbed pencil  $\mathcal{L} + \mathcal{M}$  remains singular. In this talk, we describe the generic change of the Kronecker structure from  $\mathcal{L}$  to  $\mathcal{L} + \mathcal{M}$ . We will assume that the Kronecker structure of  $\mathcal{L}$  is known, whereas only partial information about the structure of  $\mathcal{M}$  is needed. We also give sufficient conditions under which the mentioned generic change on the Kronecker structure holds. This work, contained in [1], is related with a previous one by the authors concerning the change of the Weierstrass structure of a regular matrix pencil under low rank perturbations, [2]. However, the generic behavior we find for the singular case has nothing to do with the behavior for regular matrix pencils. Besides, the singular case requires very different mathematical techniques.

**Sección en el CEDYA 2007:** Álgebra lineal numérica

### Referencias

- [1] F. DE TERÁN AND F. M. DOPICO *Low rank perturbation of Kronecker structures without full rank*, To appear in SIAM J. Matrix Anal. Appl.
- [2] F. DE TERÁN, F. M. DOPICO AND J. MORO, *Low rank perturbation of Weierstrass structure*, submitted, 2005.

# Propiedades de las Matrices Totalmente Negativas <sup>1</sup>

RAFAEL CANTÓ, BEATRIZ RICARTE, ANA M. URBANO

Instituto de Matemática Multidisciplinar, Univ. Politécnica de Valencia

rcanto@mat.upv.es, bearibe@mat.upv.es, amurbano@mat.upv.es

## Resumen

Una matriz real  $A$  de tamaño  $n \times n$  es (*estrictamente*) *totalmente positiva* y se denota como matriz (STP) TP, si todos sus menores son (positivos) mayores o iguales que cero. Un trabajo clásico donde se estudia este tipo de matrices desde un punto de vista algebraico es [1]. La importancia de las matrices totalmente positivas radica en la gran cantidad de aplicaciones que tiene en teoría de la aproximación, diseño asistido por ordenador, economía estadística, etc. [4]. Numerosos autores han estudiado este tipo de matrices obteniendo caracterizaciones que permiten reducir el número de menores a chequear para saber si una matriz es (STP) TP, así como obtener una factorización del tipo  $LDU$  mediante el algoritmo de Gauss y el método de eliminación de Neville.

Cuando todos los menores de la matriz  $A$  son (negativos) menores o iguales que cero se dice que la matriz  $A$  es (*estrictamente*) *totalmente negativa* y, por analogía con el caso anterior, este tipo de matrices se denota como matrices (STN) TN. Las matrices totalmente negativas pueden considerarse una generalización de las  $N$ -matrices, es decir, matrices cuyos menores principales son negativos y que aparecen en modelos económicos, en problemas de análisis multivariable, problemas de complementariedad y en conexión con el algoritmo de Lemke's para resolver problemas de programación lineal y de programación cuadrática convexa [5, 6].

En [3] los autores presentan una caracterización de las matrices STN en términos de los parámetros obtenidos a partir del proceso de eliminación de Neville y en [2] se obtiene una descomposición  $UDL$  de esta clase de matrices, así como propiedades espectrales y complementos de Schur.

Nuestro objetivo es el estudio de propiedades de las matrices TN semejantes a las propiedades que han sido estudiadas para las matrices TP. En particular, intentar reducir el número de menores a comprobar para saber si una matriz es TN. Para ello intentaremos primero encontrar una descomposición del tipo  $LDU$  para las matrices TN invertibles aplicando el algoritmo de Gauss sin intercambio de filas, lo que nos permitirá afirmar que la matriz  $L$  es triangular inferior,  $U$  triangular superior y  $D$  es una matriz diagonal que contiene los pivotes del proceso de eliminación. Además, una descomposición de esta forma permite estudiar propiedades de la matriz inicial  $A$ , tales como signos de determinados menores que no son más que elementos de estas matrices y caracterizar cuándo una matriz no es TN.

Por otra parte, es conocido que la descomposición  $LDU$  también puede obtenerse, bajo ciertas condiciones, aplicando el método de eliminación completo de Neville (este método consiste en hacer ceros en una columna de una matriz sumando a cada fila un múltiplo de la fila anterior, en lugar de utilizar una fila fija con un pivote fijo como en el método de eliminación de Gauss). Como consecuencia, si es posible obtener una descomposición  $LDU$  aplicando en algoritmo de Gauss nuestro siguiente objetivo es estudiar si a las matrices TN invertibles podemos aplicarle el método de eliminación completo de Neville sin intercambio de filas para obtener dicha factorización.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN, Análisis Numérico y Simulación Numérica

## Referencias

- [1] T. Ando. *Totally positive matrices*. Linear Algebra and its Applications, vol. 90, (1987), 165-219.
- [2] S.M. Fallat y P. Van Den Driessche. *On matrices with all minors negative*. The Electronical Journal of Linear Algebra, vol. 7, (2000), 92-99.
- [3] M. Gasca y J.M. Peña. *A test for strictly Sign-regularity*. Linear Algebra and its Applications, vol. 197-198, (1994), 133-142.
- [4] S. Karlin, *Total Positivity*, Stanford University Press, Stanford, CA, 1968.
- [5] T. Parthasarathy y G. Ravindran. *N-matrices*. Linear Algebra and its Applications, vol. 139, (1990), 89-102.
- [6] R. Saigal. *On the class of Complementary Cones and Lemke's Algorithm*. SIAM Journal Appl. Math., vol. 23, (1972), 46-60.

---

<sup>1</sup>Trabajo financiado por el proyecto DGI AGL2004-03263/AGR.

## Determinación de $H$ -matrices

ISABEL GIMENEZ, RAFAEL BRU, CRISTINA CORRAL, JOSÉ MAS

Instituto de Matemática Multidisciplinar, Univ. Politécnica de Valencia

{igimenez,rbru,ccorral,jmasm}@imm.upv.es

### Resumen

Cuando la matriz de comparación de una matriz  $A$ ,  $\mathcal{M}(A)$ , es  $M$ -matriz, se dice que  $A$  es  $H$ -matriz. Este tipo de matrices aparecen, por ejemplo, en la discretización por elementos finitos de ciertas ecuaciones parabólicas no lineales, en la discretización de ecuaciones en derivadas parciales, y su determinación es útil en la obtención de preconditionadores para la resolución de sistemas lineales por métodos iterativos de tipo Krylov. Aunque son muchas las caracterizaciones de  $H$ -matriz que provienen de las de  $M$ -matriz invertible, una  $H$ -matriz invertible puede tener una matriz de comparación singular. En este trabajo caracterizamos las  $H$ -matrices con elementos diagonales no nulos, tanto para  $\mathcal{M}(A)$  invertible como singular, con  $\rho \leq 1$ , siendo  $\rho$  el radio espectral de la matriz de Jacobi de  $\mathcal{M}(A)$ . Proponemos entonces algoritmos para acotar el valor de  $\rho$  y concluir si la matriz  $A$  es  $H$ -matriz o no. Cuando  $A$  es irreducible, se proponen modificaciones de los algoritmos para aproximar el valor de  $\rho$  y el vector de Perron asociado. Se estudia y se dan propuestas también para el caso reducible.

**Sección en el CEDYA 2007:** Otros temas: Análisis matricial

### Referencias

- [1] A. Berman and R. J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, London, 1979.
- [2] B. Li, L. Li, M. Harada, H. Niki, M. J. Tsatsomeros. *An iterative criterion for  $H$ -matrices*. Linear Algebra Appl., 271 (1998), 179–190.
- [3] L. Li. *On the iterative criterion for generalized diagonally dominant matrices*. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 24-1 (2002) 17–24.
- [4] R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

# Métodos numéricos para matrices signo-regulares

V. CORTÉS, J. M. PEÑA

Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

vcortes@unizar.es, jmpena@unizar.es

## Resumen

Una matriz de  $n \times n$  es *signo-regular* (SR) si para cada  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) todos los menores tienen el mismo signo no estricto. Presentamos algunos avances recientes sobre el estudio de las matrices SR y sobre métodos numéricos adaptados a las mismas. La eliminación de Neville se ha mostrado muy útil en el tratamiento de matrices totalmente positivas (véase [2]). En [1], se introduce una estrategia de pivotaje para la eliminación de Neville de matrices SR. Se presentan aplicaciones y ventajas de dicha estrategia.

**Sección en el CEDYA 2007:** OTROS TEMAS

## Referencias

- [1] V. Cortés, J. M. Peña, *Sign regular matrices and Neville elimination*, Linear Algebra Appl. 421 (2007), 53–62.
- [2] M. Gasca, J. M. Peña, *Total positivity and Neville elimination*, Linear Algebra Appl. 165 (1992), 25–44.

# Sobre soluciones reflexivas de la ecuación matricial $AXB = C$

A. HERRERO, N. THOME

Instituto de Matemática Multidisciplinar, Univ. Politécnica de Valencia

aherrero@mat.upv.es, njthome@mat.upv.es

## Resumen

El problema de resolver la ecuación matricial  $AXB = C$  ha sido ampliamente estudiado en [1, 2]. Algunos autores han buscado la solución general de este problema mientras que otros han considerado algún tipo de restricción sobre la solución buscada (simétrica, definida positiva, etc.) o bien sobre las matrices conocidas (por ejemplo,  $B = I$  y  $A$  una reflexión generalizada, entre otras). Este tipo de matrices se utilizan en ingeniería y computación científica como puede verse en [3], así como su aplicación en teoría de control aparece en [4, 5].

En este trabajo se estudia dicho problema buscando soluciones  $X$  que sean reflexivas con respecto a una reflexión generalizada  $P$  (es decir, la matriz  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  debe cumplir la condición  $X = PXP$  siendo  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tal que  $P$  es hermítica y tripotente) utilizando un enfoque diferente a las técnicas usadas en los trabajos citados.

**Sección en el CEDYA 2007:** OTROS TEMAS

## Referencias

- [1] Q. Wang, C. Yang. *The Re-nonnegative definite solutions to the matrix equation  $AXB = C$* , Comment. Math. Univ. Carolinae, 39 (1998), 7–13.
- [2] Z. Zhang, X. Hu, L. Zhang. *On the Hermitian-generalized Hamiltonian solutions of the linear matrix equations*. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 27, 1 (2005), 294–303.
- [3] H. C. Chen. *Generalized reflexive matrices: special properties and applications*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 19 (1998), 140–153.
- [4] M. Jamshidi. *An overview on the solutions of the algebraic matrix Riccati equation and related problems*. Large Scale Systems 1 (1980), 167–192.
- [5] H. K. Wimmer. *Decomposition and parametrization of semidefinite solutions of the continuous-time algebraic Riccati equation*, SIAM J. Control Optim., 32 (1994), 995–1007.

# Métodos iterativos multi-punto para ecuaciones no lineales

JUAN R. TORREGROSA, A. CORDERO

Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia

jrtorre@mat.upv.es, acordero@mat.upv.es

## Resumen

En este trabajo abordamos el problema de encontrar las raíces de la ecuación  $f(x) = 0$ , donde  $f$  es una función real de variable real. El método de punto fijo más conocido para resolver este problema es el método de Newton,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde  $x_0$  es la iteración inicial.

Numerosos autores, ver por ejemplo [1, 2, 4], han obtenido utilizando técnicas de interpolación, variantes del método de Newton que mejoran su orden de convergencia, y que responden a la expresión

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\sum_{j=1}^m A_j f'(\eta_j(x_k))}, \quad \text{con } \eta_j(x_k) = x_k - \tau_j \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

donde  $\tau_j$  son los nodos, en  $[0, 1]$ , y  $A_j$  los pesos de la fórmula de interpolación.

En este trabajo proponemos un procedimiento alternativo, para obtener variantes del método de Newton, analizando la familia de métodos iterativos multi-punto obtenidos a partir del método de Newton reemplazando  $f(x_k)$  por una combinación lineal de valores de  $f(x)$  en diferentes puntos. Concretamente, la expresión general es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{f'(x_k)} \sum_{j=1}^m A_j f(\eta_j(x_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

con

$$\eta_j(x_k) = x_k - \tau_j \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

donde  $\tau_j$  y  $A_j$  son parámetros a elegir en  $[0, 1]$  y  $\mathbb{R}$ , respectivamente. Se pone de manifiesto a lo largo de los resultados obtenidos en el trabajo que el valor de estos parámetros juega un papel importante en el orden de convergencia de los respectivos métodos.

Demostremos que siempre es posible elegir valores de los parámetros  $\tau_j$  y  $A_j$  para obtener métodos iterativos de orden 3 o superior, orden que podemos aumentar bajo ciertas condiciones sobre la función  $f$ .

La expresión general (1) incluye, para valores particulares de los parámetros, métodos conocidos como el método de Newton, el método de Traub ([3]), etc, pero también nuevos métodos para los que demostramos que su orden de convergencia e índice de eficiencia son superiores a los de los métodos clásicos.

Terminamos el trabajo presentando los resultados numéricos obtenidos al aplicar diferentes métodos contenidos en (1) a una colección de ecuaciones no lineales. Estos valores permiten ilustrar los resultados teóricos, comparar los distintos métodos y extraer conclusiones.

Todo el desarrollo llevado a cabo en este trabajo lo hemos generalizado a sistemas de ecuaciones no lineales con análogos resultados.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] A. Cordero, Juan R. Torregrosa, *Variants of Newton's method using 5th order quadrature formulas*, Applied Mathematics and Computation. doi.org/10.1016/j.amc.2007.01.062.
- [2] M. Frontini, E. Sormani, *Some variant of Newton's method with third-order convergence*, Applied Mathematics and Computation, 140 (2003) 419-426.
- [3] J.F. Traub, *Iterative methods for the solution of equations*, Chelsea Publishing Company, New York, 1982.
- [4] S. Weerakoon, T.G.I. Fernando, *A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence*, Applied Mathematics Letters, 13 (8) (2000) 87-93.



# Convolución adaptativa, rápida y con poca memoria para ecuaciones de evolución

M. LÓPEZ-FERNÁNDEZ

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Valladolid

mlopez@mac.uva.es

C. LUBICH

Mathematisches Institut, Univ. Tübingen

lubich@na.uni-tuebingen.de

A. SCHÄDLE

Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin

schaedle@zib.de

## Resumen

Presentamos un algoritmo de paso variable para aproximar convoluciones que aparecen en ecuaciones de evolución conteniendo términos con memoria. Para avanzar  $N$  pasos, el algoritmo requiere sólo  $O(N \log N)$  operaciones y  $O(\log N)$  datos en la memoria activa, en lugar de las  $O(N^2)$  operaciones y  $O(N)$  datos en la memoria necesarios para una implementación más directa. Una característica básica del algoritmo es la reducción, vía integrales de contorno, a ecuaciones diferenciales escalares, que se integran numéricamente con paso variable. En lugar del núcleo de convolución, el método utiliza los valores de su transformada de Laplace. Ilustramos el algoritmo aplicándolo a un modelo para reacciones químicas con difusión inhibida.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] M. LÓPEZ-FERNÁNDEZ, C. LUBICH AND A. SCHÄDLE, *Adaptive, Fast and Oblivious Convolution in Evolution Equations with Memory*, Preprint, 2006.
- [2] C. LUBICH AND A. SCHÄDLE, *Fast convolution for nonreflecting boundary conditions*, SIAM J. Sci. Comput., 24 (2002), pp. 161–182.
- [3] A. SCHÄDLE, M. LÓPEZ-FERNÁNDEZ, AND C. LUBICH, *Fast and oblivious convolution quadrature*, SIAM J. Sci. Comput. 28 (2006), pp. 421–438.
- [4] S. B. YUSTE, L. ACEDO, K. LINDENBERG, *Reaction front in an  $A+B \rightarrow C$  reaction-subdiffusion process*, Phys. Rev. E 69, (2004), pp. 036126.

# Sobre la región de accesibilidad de ciertas iteraciones de tercer orden

J. A. EZQUERRO, M. A. HERNÁNDEZ, N. ROMERO

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

jezquer@unirioja.es, mahernan@unirioja.es, natalia.romero@unirioja.es

## Resumen

En este trabajo vamos a considerar el problema de aproximar localmente una raíz  $x^*$  de la ecuación  $F(x) = 0$  en un espacio de Banach  $X$ , donde  $F$  es un operador definido en un subconjunto abierto convexo no vacío  $\Omega$  de  $X$  y con valores en otro espacio de Banach  $Y$ . Un gran número de problemas de matemática aplicada y de ingeniería se pueden formular como  $F(x) = 0$ , por lo que su resolución adquiere cierta relevancia. La resolución de este tipo de ecuaciones se lleva comúnmente a cabo mediante la aplicación de procesos iterativos, de manera que, a partir de una o varias aproximaciones iniciales, se construye una sucesión de aproximaciones que converge a la raíz de la ecuación. Aquí sólo vamos a considerar procesos iterativos de un punto y de la forma  $x_{n+1} = G(x_n)$ ,  $n \geq 0$ . Un aspecto muy importante en el estudio de este tipo de procesos iterativos es la elección de una buena aproximación inicial. En general, es conocida la necesidad de imponer condiciones a las aproximaciones iniciales para obtener la convergencia de los procesos iterativos.

El método de Newton,  $x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n)$ ,  $n \geq 0$ , es seguramente la iteración de un punto más conocida y utilizada para resolver ecuaciones del tipo anterior, siendo su convergencia al menos cuadrática ([3]). También son muy utilizados otros métodos iterativos de tercer orden, como por ejemplo: el método de Chebyshev, el método de Halley, etc. Es bien sabido que cuanto mayor es el orden de convergencia de un proceso iterativo, mayor es su velocidad de convergencia a una solución de la ecuación. Pero también es sabido que uno de los problemas, entre otros, que tiene el uso de iteraciones de orden alto es que la región de accesibilidad se reduce con respecto a la del método de Newton ([1]).

El objetivo de este trabajo se va a centrar entonces en dos partes: una, estudiar la siguiente familia multiparamétrica de procesos iterativos con orden de convergencia al menos tres ([2])

$$\begin{cases} x_0 \text{ dado,} \\ x_{n+1} = x_n - H(L_F(x_n))[F'(x_n)]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

donde  $L_F(x_n) = [F'(x_n)]^{-1}F''(x_n)[F'(x_n)]^{-1}F(x_n)$  y  $H(z) = \sum_{k \geq 0} A_k z^k$ , con  $A_k \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ , cuando se aplica a la resolución de una ecuación como la indicada anteriormente; y dos, analizar la convergencia de estas iteraciones a una raíz de la ecuación desde los mismos puntos de salida que el método de Newton. Notemos que la anterior familia multiparamétrica de procesos iterativos se obtiene como caracterización de métodos iterativos tipo Newton de tercer orden ([2]), e incluye las iteraciones de tercer orden más usuales: el método de Chebyshev, el de Halley, el de Super-Halley, los  $C$ -métodos, etc.

Prestaremos especial atención al estudio de la convergencia semilocal de los procesos iterativos bajo condiciones de tipo Newton-Kantorovich ([3]). Para ello, utilizaremos una técnica que consiste en la construcción de un sistema de relaciones de recurrencia en el que ciertas sucesiones escalares están implicadas, demostrándose a partir de ellas la convergencia de las iteraciones.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] J. A. Ezquerro y M. A. Hernández, *Region of accessibility for a class of Newton-type iterations*, *Proyecciones*, 17, 1 (1998), 71–76.
- [2] M. A. Hernández y N. Romero, *On a characterization of some Newton-like methods of R-order at least three*, *J. Comput. Appl. Math.*, 183, 1 (2005), 53–66.
- [3] L. V. Kantorovich y G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.

# Estudio numérico de números de rotación y variacionales de familias paraméricas de difeomorfismos del círculo

ALEJANDRO LUQUE, JORDI VILLANUEVA

Dpto. de Matemática Aplicada I, Univ. Polit. Cataluña

alejandro.luque@upc.edu, jordi.villanueva@upc.edu

## Resumen

Un parámetro importante para estudiar la dinámica de curvas invariantes (y más en general, toros invariantes) es el número de rotación (resp. vector de frecuencias). Es por ello que en los últimos años se han desarrollado diversos métodos numéricos para su aproximación (ver [1, 2, 3, 4]). Recientemente, en [5] se ha presentado una nueva forma de calcular números de rotación con alta precisión y bajo coste computacional, siendo una alternativa al análisis de frecuencias. El método requiere que la dinámica sobre la curva invariante induzca un difeomorfismo del círculo conjugado a un rotación rígida de forma suficientemente regular y, básicamente, consiste en promediar de forma adecuada los iterados del difeomorfismo y hacer extrapolación de Richardson.

En este trabajo se presenta una extensión del método para considerar familias multiparamétricas de difeomorfismos del círculo. Se obtiene así un método muy eficiente para calcular derivadas del número de rotación respecto a parámetros. Además, se ha elaborado un procedimiento para obtener desarrollos asintóticos de subvariedades (p.e. curvas invariantes) de número de rotación constante.

Tras presentar el método, se ilustrará su aplicación mediante el estudio de la familia de Arnold

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\epsilon} : \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ x &\longmapsto x + \alpha + \epsilon \sin(x), \end{aligned}$$

donde  $(\alpha, \epsilon) \in [0, 2\pi) \times [0, 1)$  son parámetros tales que  $f_{\alpha,\epsilon}$  es un difeomorfismo analítico del círculo. Las lenguas de Arnold se definen como el conjunto  $T_\theta = \{(\alpha, \epsilon) : \rho(\alpha, \epsilon) = \theta\}$  para cualquier  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Si  $\theta$  es diofántico, entonces  $T_\theta$  es una curva analítica que es el grafo de  $\epsilon \mapsto \alpha_\theta(\epsilon)$ , con  $\alpha_\theta(0) = \theta$ . El método elaborado nos permite aproximar numéricamente los coeficientes del desarrollo de Taylor de  $\alpha_\theta(\epsilon)$  para distintos valores de  $\theta$  (diofánticos) hasta orden 19 con una precisión de  $10^{-50}$ .

Finalmente, se comentarán también otras aplicaciones: estudio de curvas invariantes de simplectomorfismos planos, análisis de frecuencias y generalización a dimensión superior (toros KAM).

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] H. Broer y C. Simo. *Hill's equation with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomena*. Bol. Soc. Brasil. Mat. (S.N.) 29 (2) 253-293, 1998.
- [2] R. de la Llave y N. Petrov. *Regularity of conjugacies between critical circle maps: an experimental study*. Exp. Math. 11 (2), 219-241, 2002.
- [3] G. Gómez, J.M. Mondelo y C. Simó. *Refined Fourier analysis: procedures, error estimates and applications*. <http://www.maia.ub.es/dsg/2001/index.html>, 2001 (preprint).
- [4] J. Laskar, C. Froeschlé y A. Celletti. *The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. Application to the standard mapping*. Physica D, 56 (2-3), 253-269, 1992.
- [5] T. M-Seara y J. Villanueva. *On the numerical computation of Diophantine rotation numbers of analytic circle maps*. Physica D, 107-120, 2006.

# Un estudio unificado de la convergencia semilocal de métodos tipo Newton de dos puntos en espacios de Banach

MARÍA JESÚS RUBIO, MIGUEL A HERNÁNDEZ

Dpto. de Matemáticas y Computación, Univ. de La Rioja

mjesus.rubio@dmc.unirioja.es, mahernan@dmc.unirioja.es

## Resumen

En este trabajo consideramos una expresión general de métodos tipo Newton de dos puntos mediante el siguiente algoritmo (estudiado por Argyros en [?])

$$x_{n+1} = x_n - (A(x_{n-1}, x_n))^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0, \quad x_{-1}, x_0 \in \Omega. \quad (1)$$

donde  $F$  es un operador definido en un dominio convexo  $\Omega$  contenido en un espacio de Banach  $X$  con valores en otro espacio de Banach  $Y$ .  $A(u, v)$  es un operador lineal y acotado de  $X$  en  $Y$ ,  $A(u, v) \in \mathcal{L}(X, Y)$

Dicho algoritmo lo utilizaremos para aproximar una solución de la ecuación

$$F(x) = 0.$$

Estudiamos condiciones de convergencia semilocal para (1), teniendo en cuenta que este algoritmo puede representar procesos iterativos como el método de Newton [?], método de la Secante [?], métodos de tipo Newton ([?], [?]), métodos de tipo Secante [?], métodos de tipo Steffensen [?], etc.

Nuestro objetivo es establecer condiciones generales de convergencia semilocal, más suaves que las conocidas como condiciones de tipo Kantorovich, para los algoritmos que admiten la representación dada en (1). Así obtendremos una teoría modificada de convergencia semilocal para todos los métodos citados anteriormente y que son habitualmente utilizados en problemas como ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales, sistemas de ecuaciones no lineales, etc.

Por otra parte, siguiendo la idea utilizada por otros autores ([?], [?]), consideramos la siguiente descomposición para  $F$ :

$$F(x) = G(x) + H(x)$$

donde  $G, H : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ , siendo  $G$  un operador diferenciable mientras que  $H$  no lo es. Así, podemos obtener a partir de nuestro estudio, resultados para aproximar una solución de una ecuación  $F(x) = 0$ , cuando  $F$  es un operador no diferenciable.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] I.K. Argyros. *A unifying local-semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space*. J. Math. Anal. Appl., 298 (2004), 374-379.
- [2] E. Catinas. *On some iterative methods for solving nonlinear equations*. Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., 23 (1994), 47-53.
- [3] M. Heinkenschloss, C.T. Hellej y H.T. Tran. *Fast algorithms for nonsmooth compact point problems*. SIAM J. Numer. Anal., 29 (1992), 1769-1792.
- [4] M.A. Hernández, M.J. Rubio y J.A. Hezquerro. *Solving a special case of conservative problems by secant-like methods*. Appl. Math. Comput., 169, no. 2 (2005), 926-942.
- [5] L.W. Johnson y D.R. Scholz. *On Steffensen's Method*. SIAM J. Numer. Anal., 5, no. 2 (1968), 296-302.
- [6] L.V. Kantorovich y G.P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press (Oxford), 1982.
- [7] F.A. Potra y V. Ptak, *Nondiscrete induction and iterative processes*, Pitman Publ., New York, 1984.
- [8] W.C. Rheinboldt. *A unified convergence theory for a class of iterative process*. SIAM J. Numer. Anal., 5 (1968), 42-63.
- [9] J.W. Schmidt. *Untere Fehlerschranken fur Regula-Falsi Verfahren*. Period. Math. Hungar., 9 (1978), 241-247.

# Convergencia y análisis numérico de un método de tercer orden para sistemas de ecuaciones no lineales

SERGIO AMAT, SONIA BUSQUIER, CONCHA BERMÚDEZ, FERNANDO MANZANO

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística, U.P. Cartagena.

sergio.amat@upct.es, sonia.busquier@upct.es, concepcion.bermudez@upct.es

SERGIO PLAZA

Dpto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Santiago de Chile.

splaza@lauca.usach.cl

## Resumen

A lo largo de la Historia la resolución de ecuaciones no lineales ha preocupado a los matemáticos. Hoy en día, con los adelantos tecnológicos, estas ecuaciones son aproximadas de forma eficiente por medio de métodos iterativos. La idea es generar una sucesión de aproximaciones  $x_0, x_1, x_2, \dots$  que bajo ciertas condiciones converge a la raíz deseada.

En general, un método iterativo  $x_{n+1} = \Phi(x_n)$  es de orden  $p$ -ésimo si la solución  $x^*$  de  $F(x) = 0$  satisface  $x^* = \Phi(x^*)$ ,  $\Phi'(x^*) = \dots = \Phi^{(p-1)}(x^*) = 0$  y  $\Phi^{(p)}(x^*) \neq 0$ . Para este método, el error  $|x^* - x_{n+1}|$  es proporcional a  $|x^* - x_n|^p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por ejemplo, el método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n).$$

tiene convergencia cuadrática (orden dos) para raíces simples.

En este trabajo, presentamos una extensión a espacios de Banach de un método de tercer orden recientemente presentado en el caso escalar [2]. Se introducirán varios teoremas de convergencia, modificaciones que no necesitan el computo de derivadas y varios experimentos numéricos.

## Referencias

- [1] S. Amat, S. Busquier and J.M. Gutiérrez, *Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations*. J. Comput. Appl. Math. **157** (1), 197–205, (2003).
- [2] M.A. Noor et al., *An iterative method with cubic convergence for nonlinear equations*, Appl. Math. Comp., **183**, (2006), 1249-1255.

# Compression of images with learning multiresolution schemes

D. F. YÁÑEZ, F. ARANDIGA

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Valencia

dionisio.yanez@uv.es, arandiga@uv.es

A. COHEN

Laboratoire Jacques-Louis Lions, Univ. Pierre et Marie Curie

cohen@ann.jussieu.fr

## Resumen

Learning theory plays a key role in the several scientific fields such as statistics, data mining, artificial intelligence, as well as in some engineering areas. Multiscale decompositions are a well established tool that aims at a rearrangement of the information contents in a set of discrete data. Multiresolution transform are based on transfer operators connecting consecutive resolution levels. In this work we apply learning techniques in order to construct one of the key operators of multiscale decompositions within Harten's multiresolution framework: the prediction operator. When applied to the compression of images, 'Learning' can be used to obtain nearly-optimal filters for the prediction process for images on a given library or class. We perform several numerical experiments with these newly designed "learning-multiresolution" transforms and compare our results with the results obtained with other more classical methods.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] F. ARANDIGA, R. DONAT (2000): "Nonlinear multiscale descompositions: The approach of A. Harten", *Numerical Algorithms*, 23 175-216.
- [2] J. FRIEDMAN, T. HASTIE, R. TIBSHIRANI (2001): *The Elements of Statistical Learning* Springer
- [3] A. HARTEN AND B. ENGQUIST AND S. OSHER AND S.R. CHAKRAVARTHY (1987): "Uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes.", *J. Comput. Phys.*, 71 231-303.
- [4] VLADIMIR N. VAPNIK (1995) *The Nature of Statistical Learning Theory*, Springer

# Una nueva formulación mixta-primal para el problema de la elasticidad lineal en el plano

M. GONZÁLEZ

Dpto. de Matemáticas, Univ. da Coruña

mgtaboad@udc.es

T.P. BARRIOS, L.F. GATICA

Fac. de Ingeniería, Univ. Católica de la Santísima Concepción

tomas@ucsc.cl, lgatica@ucsc.cl

G.N. GATICA

Dpto. de Ingeniería Matemática, Univ. de Concepción

gg@ing-mat.udec.cl

## Resumen

Consideramos el problema de la elasticidad lineal en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , acotado y simplemente conexo. Suponemos que la frontera de  $\Omega$ ,  $\Gamma$ , es Lipschitz, y que  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$  son dos subconjuntos disjuntos de  $\Gamma$  tales que  $\Gamma_D$  tiene medida positiva y  $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ . Dada una fuerza de volumen  $\mathbf{f}$  y una tracción  $\mathbf{g}$ , el problema consiste en determinar el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$  y el de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  de un material lineal elástico e isótropo que ocupa la región  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathcal{C} \mathbf{e}(\mathbf{u}) && \text{en } \Omega \\ -\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{f} && \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{g} && \text{sobre } \Gamma_N. \end{aligned} \tag{1}$$

Denotamos por  $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t)$  el tensor de pequeñas deformaciones y por  $\mathcal{C} \mathbf{e}(\mathbf{u})$  el tensor de elasticidad determinado por la ley de Hooke:

$$\mathcal{C} \boldsymbol{\zeta} := \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\zeta} \quad \forall \boldsymbol{\zeta} \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2},$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\lambda, \mu > 0$  son las constantes de Lamé, y  $\mathbf{n}$  es la normal unitaria exterior a  $\Gamma$ .

Proponemos una nueva formulación variacional mixta aumentada para el problema (1). La nueva formulación se obtiene al añadir a la formulación de Hu-Washizu un término de mínimos cuadrados de Galerkin, basado en la definición del tensor de deformación en términos del desplazamiento. Probamos que el esquema discreto correspondiente es estable siempre que para aproximar el par desplazamiento-presión se utilice un par estable para el problema de Stokes. Además, es necesario enriquecer adecuadamente el espacio de elementos finitos de las deformaciones. Realizamos el análisis a priori y a posteriori del error, y mostramos experimentos numéricos que confirman los resultados teóricos para el caso en que el par desplazamiento-presión se aproxima usando el mini-elemento.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] D. Braess, *Finite Elements. Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*, Cambridge University Press, 1997.
- [2] C. Carstensen y G. Dolzmann, *A posteriori error estimates for mixed FEM in elasticity*, Numer. Math. 81 (1998) 187-209.
- [3] J.K. Djoko y B.D. Reddy, *An extended Hu-Washizu formulation for elasticity*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 195, 39&40 (2006) 6330-6346.
- [4] V. Girault y P.A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [5] M. Lonsing y R. Verfürth, *A posteriori error estimators for mixed FEM in linear elasticity*, Num. Math. 97 (2004) 757-778.

# Sobre la aproximación por elementos finitos de problemas de ondas. Aplicación a problemas de aguas someras

RAMON CODINA

Universitat Politècnica de Catalunya

ramon.codina@upc.edu

## Resumen

El objetivo fundamental de este trabajo es introducir métodos estabilizados de elementos finitos para la aproximación numérica de la ecuación de ondas hiperbólica escrita en forma mixta. El problema puede escribirse como hallar una función escalar  $\eta$  y un campo vectorial  $\mathbf{u}$  solución del sistema

$$\partial_t \eta + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0, \quad \partial_t \mathbf{u} + g\nabla \eta = \mathbf{0},$$

con las adecuadas condiciones iniciales y de contorno. Los parámetros  $g$  y  $H$  dependen del problema físico. Estas ecuaciones modelan en particular flujos de aguas someras, en cuyo caso  $\eta$  representa la elevación del agua,  $\mathbf{u}$  la velocidad media a lo largo de la profundidad  $H$  y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

El objetivo fundamental es explicar por qué el método de elementos finitos estándar de Galerkin aplicado al sistema anterior da lugar a una formulación numérica inestable. Esta inestabilidad se puede evitar mediante el uso de los llamados métodos de estabilización. En particular, la formulación que proponemos se basa en descomponer la incógnita en su componente en el espacio de elementos finitos y un término adicional llamado subescala. La forma de determinar esta subescala de forma aproximada define la formulación de elementos finitos estabilizada. En particular, la formulación que proponemos tiene como características distintivas

- La posibilidad de considerar las subescalas ortogonales al espacio de elementos finitos.
- La posibilidad de considerar que las subescalas son dependientes del tiempo.

Ambos conceptos los aplicamos a la ecuación de ondas, dando lugar a una formulación numérica con propiedades de estabilidad mejores que en el método de Galerkin.

Una vez analizado el modelo básico, discutimos su extensión tanto a las clásicas ecuaciones no lineales de aguas poco profundas como al modelo de Boussinesq modificado. Este último puede escribirse como

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) + \varepsilon \nabla \cdot (\eta \mathbf{u}) + \mu^2 \nabla \cdot \mathbf{J}_\eta &= 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + g\nabla \eta + \varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mu^2 \mathbf{J}_u &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon$  y  $\mu$  son parámetros adimensionales que miden la no linealidad y la dispersividad del modelo, y  $\mathbf{J}_\eta$  y  $\mathbf{J}_u$  son campos vectoriales que dependen de  $\mathbf{u}$ . Comentamos diversos aspectos tanto de la extensión del método de estabilización a este caso como de su implementación numérica.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN



# Aumento de la eficiencia de un método de descomposición de dominio mediante estimaciones a posteriori.

D. FRANCO CORONIL, T. CHACÓN REBOLLO, E. CHACÓN VERA

Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla

franco@us.es, chacon@us.es, eliseo@us.es

C. BENARDI

Lab. Jacques-Louis Lions, C. N. R. S. et Univ. Pierre et Marie Curie

bernardi@ann.jussieu.fr

## Resumen

En este trabajo introducimos un método de descomposición de dominio sin solapamiento con penalización, que viene motivado a partir de un análisis del error a posteriori del método estudiado por T. Chacón y E. Chacón en [1] y [2].

Este método, fuerza la continuidad de las variables entre subdominios adyacentes, mediante un técnica de penalización. Si denotamos esta interface por  $\Gamma$ , la técnica consiste en añadir un término de penalización  $L^2(\Gamma)$  a una formulación variacional adecuada, que asegura la continuidad de los flujos a través de la interface. Este método proporciona soluciones bastante precisas, pero tiene una tasa de convergencia bastante lenta. En [2], se propusieron algunas soluciones a este problema, en particular el uso de técnicas generales de aceleración de sucesiones, tales como el método de Aitken o el del Polinomio de Extrapolación Minimal.

Con el objetivo de mejorar la tasa de convergencia del método, en este trabajo, introducimos una nueva versión del método en la cual un término de penalización  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  reemplaza el término  $L^2(\Gamma)$  del método original de [2]. De esta forma se fuerza a que el salto de las incógnitas a lo largo de la interface se anule, en un sentido más fuerte.

La elección de este nuevo término es sugerido a partir del análisis de error a posteriori del método de descomposición de dominio introducido en [2], que presentamos en este trabajo. En realidad, el punto esencial de nuestro trabajo es que, si la penalización  $L^2(\Gamma)$  es reemplazada por la penalización  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ , el número de iteraciones necesarias para que el método de descomposición de dominio alcance una solución con un error del mismo orden que el error de discretización, se reduce drásticamente.

Además, este análisis de error a posteriori proporciona de modo independiente indicadores de error tanto para el error de penalización como para el de discretización. Estos indicadores nos han permitido desarrollar estrategias computacionales con el objetivo de mejorar aun más los resultados numéricos. Estas estrategias las hemos aplicado en los siguientes casos:

- Por un lado, para determinar un valor óptimo para el parámetro de penalización para una malla fija.
- Por otro lado, para la determinación conjunta tanto de valores optimales para el parámetro de penalización como de mallas óptimas (mallas adaptadas). En los ensayos realizados hasta ahora hemos obtenido una reducción de al menos 50% del costo computacional.

Sección en el CEDYA 2007: AN

## Referencias

- [1] Chacón Rebollo, T., Chacón Vera, E., *A non-overlapping domain decomposition method for the Stokes equations via a penalty term on the interface*. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 334, Série I (2002), 1–16.
- [2] Chacón Rebollo, T., Chacón Vera, E., *Study of a non-overlapping domain decomposition method: Poisson and Stokes problems*. Appl. Numer. Math., 48 (2004), 169–194.

# Regularization and relaxation tools for interface coupling

F. COQUEL, E. GODLEWSKI, N. SEGUIN

Laboratoire Jacques-Louis Lions, Univ. Pierre et Marie Curie & CNRS, Paris

coquel@ann.jussieu.fr, godlewski@ann.jussieu.fr, seguin@ann.jussieu.fr

## Resumen

We have been considering, in a series of papers, the coupling of systems, both from a theoretical and from a numerical point of views. The actual problem arises from the coupling of codes in the industrial context of thermohydraulics in nuclear reactors. These codes model liquid-vapor flows and the systems under consideration are systems of conservation laws of hyperbolic nature. Typically, as model problems, we have been considering the coupling of homogeneous models of two-phase flows (HEM and HRM models in [1]).

The coupling problem might be interpreted as solving conservation laws with discontinuous coefficients, in which case the flux is assumed to be continuous at the interface. However, we have followed an approach where the coupling is a priori non conservative, which we have named *state coupling* since (in general) it ensures the continuity or *transmission* of the state variables, as opposed to *flux coupling*.

The precise coupling conditions, introduced in [5], impose that two boundary value problems be well-posed. Since boundary value problems for hyperbolic systems are a difficult subject, these coupling conditions cannot always be explicitated, and moreover may lead to ill-posed problems. We have been able to justify the approach from a theoretical point of view, using different tools and in various contexts.

The special structure of Lagrangian systems [2] has enabled us to express the coupling condition when a special set of transmitted variables is chosen, for rather general fluid systems.

Then, Dafermos regularization was introduced in [4] in the scalar case. This regularization allows the approximation of coupled Riemann problems by smooth profiles and enlightens the possible discontinuous behavior of the limit solutions at the interface.

In another direction, we have used relaxation systems in a global numerical procedure. By introducing a larger but simpler system on which a state coupling procedure is applied, it ensures a conservative numerical coupling of two Euler systems which avoids resonance. This very powerful tool can be used for rather general fluid systems. In the scalar case, it can be analyzed and justified and we can link the results to those of [3].

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP, AN

## Referencias

- [1] A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, F. Lagoutière, P.-A. Raviart, N. Seguin. *The coupling of homogeneous models for two-phase flows*. Int. Journal for Finite Volume, **4**(1) (2007).
- [2] A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, F. Lagoutière, P.-A. Raviart, N. Seguin. *Coupling of general Lagrangian systems* (submitted) (2006).
- [3] F. Bachmann, J. Vovelle. *Existence and uniqueness of entropy solution of scalar conservation laws with a flux function involving discontinuous coefficients*. Comm. Partial Differential Equations, **31** no. 1-3 (2006), 371–395.
- [4] B. Boutin, F. Coquel, E. Godlewski. *Dafermos regularization for interface coupling of conservation laws*. In Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems, Theory, Numerics, Applications. *Hyp2006 proceedings*, Springer (2007).
- [5] E. Godlewski, K.-C. Le Thanh, P.-A. Raviart. *The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws: II. The case of systems*. ESAIM:M2AN, **39** (2005), 49–692.

# Estimativos del error a posteriori para problemas de valores iniciales no lineales en el contexto de los espacios de Banach y los semigrupos

E. CUESTA, CH. MAKRIDAKIS

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Valladolid y  
Department of Applied Mathematics, University of Crete (Greece)

eduardo@mat.uva.es, makr@tem.ouc.gr

## Resumen

Se considera un problema de valores iniciales abstracto

$$u' = F(u), \quad u(0) = u_0, \quad (1)$$

donde  $F : \mathcal{B} \subset X \rightarrow X$ ,  $X$  es un espacio de Banach complejo,  $\mathcal{B} \subset X$  es un conjunto abierto y  $u_0 \in X$ .

El problema (1) es discretizado por medio del método de Euler para el que un análisis a priori del error ya fue llevado a cabo en el contexto de los semigrupos y los espacios de Banach en [2].

Pues bien, en este trabajo (ver [1]) se presentan estimativos del error para el método de Euler pero en el contexto de los estimativos a posteriori, lo que viene a significar que dichos estimativos están dados en términos de constantes que son conocidas o calculables en la práctica.

Un marco funcional que ha resultado ser apropiado para la obtención de estos estimativos en el contexto de los semigrupos y los espacios de Banach es de la regularidad maximal (optimal) para el problema linealizado (ver [3]). En dicho contexto se hace uso de técnicas de punto fijo para la existencia de soluciones y bajo hipótesis que no resultan ser más exigentes que las que garantizan la propia existencia de solución para (1) se obtienen nuestros estimativos.

Hay que destacar que los estimativos que aquí se presentan son locales pero válidos en todo el intervalo de existencia de solución para el problema (1), es decir no se requieren restricciones adicionales sobre el intervalo de aplicabilidad más que las propias asociadas a la existencia de solución del problema (1).

Por último, señalar que estos resultados son válidos para una amplia clase de problemas no lineales con las ventajas y las limitaciones que ello conlleva. Parece claro por ello que para ecuaciones en derivadas parciales concretas en las que las técnicas de punto fijo puedan aplicarse habrá que aprovechar las particularidades de la ecuación para, por ejemplo, conseguir que las soluciones y los estimativos existan en todo el intervalo o al menos en intervalos maximales.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] E. Cuesta and Ch. Makridakis, *A posteriori error estimates and maximal regularity for approximations of fully nonlinear parabolic problems in Banach spaces*, (submitted to Numerische Mathematik).
- [2] C. González and A. Ostermann and C. Palencia and M. Thalhammer, *Backward Euler discretization of fully nonlinear parabolic problems*. Math. Comp. 71 (2002), 125-145.
- [3] A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*. Birkhäuser, Basel, 1995.

# Análisis numérico de soluciones autosemejantes de un flujo dispersivo de curvas planas

FRANCISCO DE LA HOZ

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística e Investigación Operativa  
Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea

francisco.delahoz@ehu.es

## Resumen

En [1], Perelman y Vega estudian un flujo geométrico reversible en el tiempo de curvas planas que puede desarrollar singularidades en tiempo finito. Dicho flujo está definido por

$$\begin{cases} z_t = -z_{sss} + \frac{3}{2}\bar{z}_s z_{ss}^2, & z(s, t) \in \mathbb{C}, \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2, \\ |z_s|^2 = 1. \end{cases} \quad (1)$$

donde  $s$  es el parámetro de arco. Denotando por  $k(s, t)$  la curvatura de  $z(s, t)$ , esta satisface la KdV modificada

$$k_t + k_{sss} + \frac{3}{2}k^2 k_s = 0. \quad (2)$$

Perelman y Vega consideran soluciones autosemejantes de la mKdV de la forma

$$k(s, t) = \frac{2}{(3t)^{1/3}} u\left(\frac{s}{(3t)^{1/3}}\right), \quad t > 0; \quad (3)$$

lo cual conduce a estudiar la EDO

$$u_{xx} - xu + 2u^3 = \mu, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Consideraremos  $\mu = 0$ . Aunque necesitamos dos condiciones iniciales,  $u(0)$  y  $u_x(0)$ , para resolver (4), si imponemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0,$$

los datos iniciales para (4) forman una familia uniparamétrica, que obtendremos numéricamente, mediante un método de tiro. Posteriormente, daremos evidencia numérica de que las soluciones de (4) correspondientes satisfacen

$$-\frac{\pi}{2} \leq \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx \leq \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

Deshaciendo los cambios, en  $t = 1$ , a cada  $u$  le corresponde un dato inicial  $z$  de (1). Considerando datos iniciales sin intersecciones, mostraremos numéricamente su evolución, así como la formación de una singularidad en  $t = 0$ .

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] G. Perelman, L. Vega, *Self-similar planar curves related to modified Korteweg-de Vries equation*. Submitted.

# Simulación de una dinámica tumoral afectada por un campo electromagnético

JUAN ANTONIO CALZADA, ANA BELÉN GONZÁLEZ

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Valladolid

juacal@eis.uva.es, anagon@eis.uva.es

## Resumen

Uno de los principales puntos de interés en el modelado de procesos tumorales consiste en el desarrollo de hipótesis conducentes, en un primer momento, a entender la dinámica del tumor y, posteriormente, a desarrollar terapias efectivas en la lucha contra estos procesos.

En esta línea hay propuestos en la literatura modelos continuos y multi-escala que utilizan ecuaciones de reacción-advección-difusión de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (Q \nabla u) - \nabla \cdot (W u) + \Gamma(u) - L(u),$$

para calcular la evolución de las diferentes poblaciones celulares (celulas tumorales, endoteliales etc...) así como de las sustancias químicas que son relevantes en el proceso (nutrientes, factores angiogénicos, etc...). Citamos por ejemplo los modelos de Anderson y Chaplain [1], el de De Angelis y Preziosi [2] o los que encontramos en el trabajo de Levine et al. [5]. La integración del primero permite obtener una vasculatura en el tumor que cualitativamente coincide con lo obtenido en los experimentos, mientras que el segundo modelo permite estudiar el paso de estado avascular a vascular.

En el presente trabajo se extiende el modelo desarrollado por De Angelis y Preziosi [2] mediante la introducción de un campo electromagnético en el dominio de simulación. Dicho campo afectará el proceso de angiogénesis (destinado a vascularizar un tumor, permitiendo su posterior desarrollo y extensión) mediante la acción sobre las células endoteliales.

Analizamos mediante un método de conjunto de nivel ([3],[6]) la evolución de la interface que marca el contorno del tumor, comparándose los resultados con los obtenidos para el sistema libre (sin la presencia del campo). Estudiamos así mismo las condiciones que debe presentar el campo, en cuanto a frecuencia y aplicación, para afectar de manera efectiva el comportamiento celular (sobre todo referente al movimiento en el proceso de migración de células endoteliales).

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] A.R.A. Anderson, M.A.J. Chaplain. *Continuous and discrete mathematical models of tumor-induced angiogenesis*. J. Math. Biol. 60 (1998), 857-900.
- [2] E. De Angelis, L. Preziosi. *Advection-diffusion models for solid tumour evolution in vivo and related free boundary problem*. Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 10 (2000), 379-407.
- [3] C.S. Hogea, B.T. Murray, J.A. Sethian. *Simulating complex tumor dynamics from avascular to vascular growth using a general level-set method*. J. Math. Biol. 53 (2006), 86-134.
- [4] M. Kato (ed). *Electromagnetics in Biology*, Springer, 2006.
- [5] H.A. Levine, B.D. Sleeman, *Modeling Tumour-Induced*. Cancer Modelling and Simulation, Chapman and Hall / CRC, 2003.
- [6] J.A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, Cambridge University Press, 2006.
- [7] M. Zhao, H. Bai, E. Wang, J. Forrester, C.D. McCaig. *Electrical stimulation directly induces pre-angiogenic responses in vascular endothelial cells by signaling through VEGF receptors*, J. Cell Sci. 117 (2004), 397-405.

# Una nueva caracterización de los invariantes por feedback de cocientes de subespacios $(A, B)$ -invariantes

I. BARAGANA

Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial, Univ. del País Vasco  
itziar.baragana@ehu.es

F. PUERTA

Departament de Matemàtica Aplicada I, Univ. Politècnica de Catalunya  
puerta@ma1.upc.es

I. ZABALLA

Departamento de Matemática Aplicada y EIO, Univ. del País Vasco  
ion.zaballa@ehu.es

## Resumen

Dado un par de matrices controlable,  $(A, B) \in \mathbb{F}^{n \times n} \times \mathbb{F}^{n \times m}$ , en [1] el autor caracteriza las bases de todos los subespacios  $(A, B)$ -invariantes.

Si  $\mathcal{V} \leq \mathbb{F}^n$  es un subespacio  $(A, B)$ -invariante con restricción  $(A_1, B_1) \in \mathbb{F}^{d \times d} \times \mathbb{F}^{d \times q}$ , entonces existe una matriz  $H \in \mathbb{F}^{m \times d}$  tal que una base de  $\mathcal{V}$  está formada por las columnas de  $\mathcal{O}(A_1, H)$ , una matriz de observabilidad de  $(H, A_1)$  permutada y truncada.

Por otra parte, el subespacio  $\mathcal{V}^\perp$  es  $(B^T, A^T)$ -invariante. Si  $(A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{(n-d) \times (n-d)} \times \mathbb{F}^{(n-d) \times (m-q)}$  es una restricción de  $(B^T, A^T)$  a  $\mathcal{V}^\perp$ , entonces el par  $(A, B)$  es equivalente por feedback a un par de la forma

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} A_1 & A_3 & B_1 & B_3 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \end{array} \right].$$

Diremos que  $(A_2, B_2)$  es un cociente de  $(A, B)$  con respecto a  $\mathcal{V}$ . No está unívocamente determinado. Sin embargo, todos los pares definidos de esta forma son equivalentes por feedback.

En este trabajo, caracterizamos los índices de controlabilidad de cualquier cociente de  $(A, B)$  a  $\mathcal{V}$  en términos de la matriz  $\mathcal{O}(A_1, H)$ .

**Sección en el CEDYA 2007:** Otros temas: Análisis matricial y Teoría matemática de control de sistemas

## Referencias

- [1] A. C. Antoulas, *New results on the Algebraic Theory of Linear Systems: The Solution of the Cover Problems*. Linear Algebra Appl., 50 (1983), 1-43.

# El cambio de los invariantes por feedback mediante perturbación de columnas

INMACULADA DE HOYOS

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística e I. O., Facultad de Farmacia, UPV/EHU  
inmaculada.dehoyos@ehu.es

MARÍA ASUNCIÓN BEITIA

Dpto. de Didáctica de la Matemática y de las CCEE, Escuela de Magisterio, UPV/EHU  
asuncion.beitia@ehu.es

## Resumen

En las últimas décadas se ha estudiado el cambio de las formas canónicas de matrices obtenidas mediante la adición de una matriz con entradas suficientemente pequeñas (véase, por ejemplo, [2, 6, 8, 9, 10, 11]). En estos problemas se puede modificar todos los elementos de las matrices originales. En otros casos sólo se puede perturbar los elementos en unas determinadas posiciones, dando lugar a problemas de perturbación estructurada (véase [3, 4, 5, 7]). Nuestro problema consiste en estudiar el comportamiento de los invariantes por feedback cuando se perturban algunas columnas de una matriz rectangular.

En concreto, consideramos matrices rectangulares  $[A \ B] \in \mathbb{C}^{n \times (n+m)}$  o, equivalentemente, pares de matrices  $(A, B)$  de  $\mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times m}$ . En primer lugar, obtenemos condiciones necesarias que han de verificar los invariantes por feedback de todas las matrices  $[A \ B'] \in \mathbb{C}^{n \times (n+m)}$ , siendo  $B'$  cualquier matriz suficientemente próxima a  $B$ .

Recíprocamente, obtenemos condiciones necesarias y suficientes que tienen que satisfacer unos polinomios y unos números enteros para ser los factores invariantes y los índices de controlabilidad de un par de matrices  $(A, B')$ , siendo  $B'$  una matriz tan próxima a  $B$  como queramos. Este problema lo hemos resuelto en los siguientes casos:

1. cuando  $(A, B)$  es completamente controlable;
2. cuando  $(A, B)$  es completamente incontrolable, es decir,  $B = 0$ ;
3. cuando  $B$  sólo tiene una columna.

Estos problemas pueden considerarse también como problemas de completación de matrices, dado que una parte de la matriz queda fija (véase, por ejemplo, [1, 12, 13, 14, 15]).

**Sección en el CEDYA 2007:** Otros temas: Análisis matricial

## Referencias

- [1] I. Baragaña, I. Zaballa, *Column completion of a pair of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 27, (1990) 243-273.
- [2] J. Barriá, D.A. Herrero, *Closure of similarity orbits of nilpotent operators I. Finite rank operators*, J. Operator Theory, 1, (1979) 177-186.
- [3] M.A. Beitia, I. de Hoyos, I. Zaballa, *The change of the Jordan structure under one row perturbations*, Linear Algebra Appl., 401, (2005) 119-134.
- [4] M.A. Beitia, I. de Hoyos, I. Zaballa, *The change of similarity invariants under row perturbations: generic cases*, submitted to Linear Algebra Appl..
- [5] M.A. Beitia, I. de Hoyos, I. Zaballa, *The change of similarity invariants under row perturbations*, submitted to Linear Algebra Appl..
- [6] H. den Boer, G.Ph.A. Thijsse, *Semi-stability of sums of partial multiplicities under additive perturbation*, Integral equations and Operator Theory, 3/1, (1980) 23-42.
- [7] M. Dodig, M. Stosic, *The change of feedback invariants under one row perturbation*, Linear Algebra Appl., (2007), doi:10.1016/j.laa.2006.11.017.
- [8] J.M. Gracia, I. de Hoyos, I. Zaballa, *Perturbation of linear control systems*, Linear Algebra Appl., 121, (1989) 353-383.
- [9] I. de Hoyos, *Perturbación de Matrices Rectangulares y Haces de Matrices*, Bilbao, 1990.
- [10] A.S. Markus, E.È. Parilis, *The change of the Jordan structure of a matrix under small perturbations*, Linear Algebra Appl., 54, (1983) 139-152.
- [11] A. Pokrzywa, *On Perturbations and the equivalence orbit of a matrix pencil*, Linear Algebra Appl., 82, (1986) 99-121.
- [12] E.M. de Sá, *Embedding conditions for  $\lambda$ -matrices*, Linear Algebra Appl., 24, (1979) 33-50.
- [13] R.C. Thompson, *Interlacing inequalities for invariant factors*, Linear Algebra Appl., 24, (1979) 1-31.
- [14] I. Zaballa, *Matrices with prescribed rows and invariant factors*, Linear Algebra Appl., 87, (1987) 113-146.
- [15] I. Zaballa, *Interlacing inequalities and control theory*, Linear Algebra Appl., 101, (1988) 9-31.

# Subsistemas singulares de un sistema lineal. Una aproximación a los subespacios cuasiinvariantes

XAVIER PUERTA

IOC, Univ. Politécnica de Catalunya

francisco.javier.puerta@upc.edu

## Resumen

Dado un sistema lineal  $\dot{x} = Ax + By$ , se definen los subespacios  $(A, B)$ -invariantes como aquellos tales que para cada condición inicial en el subespacio, existe un control  $u(t)$  que hace que la correspondiente trayectoria, pertenezca enteramente al subespacio. Asimismo, se definen los subespacios cuasi- $(A, B)$ -invariantes como aquellos tales que para cada condición inicial en el subespacio, existe un control  $u(t)$  que hace que la correspondiente trayectoria, pertenezca enteramente en un entorno arbitrariamente próximo al subespacio.

Los subespacios  $(A, B)$ -invariantes se caracterizan por definir un subsistema lineal que viene dado por las ecuaciones diferenciales que verifican las trayectorias que pertenecen al mismo (vease, por ejemplo [2])

En este trabajo caracterizamos los subespacios cuasi- $(A, B)$ -invariantes a través de existencia de un sistema singular, que puede interpretarse como la restricción del sistema definido por  $(A, B)$  al subespacio, pero en el cual se admiten distribuciones como 'funciones' de control.

Una estratificación del conjunto de subespacios cuasi- $(A, B)$ -invariantes puede ser obtenida, entonces, de forma similar a [1]

**Sección en el CEDYA 2007:** Análisis matricial y teoría matemática de sistemas de control

## Referencias

- [1] J.Ferrer, F.Puerta, X.Puerta, *Differentiable structure of the set of controllable  $(A, B)$ -invariant subspaces* Lin.Alg.Appl. v.275-276 pp.161-177 , 1998.
- [2] F.Puerta, X.Puerta, *On the geometry of the set of controllability subspaces of a pair  $(A, B)$*  Lin.Alg.Appl. v.351-352 pp.585-599, 2002



# Deformaciones miniversales de tensores de segundo orden

JOSEP CLOTET, M. D. MAGRET, MARTA PEÑA

Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya

Josep.Clotet@upc.edu, M.Dolors.Magret@upc.edu, Marta.Penya@upc.edu

## Resumen

Consideramos en el espacio de parejas de tensores de orden dos simétricos la relación de equivalencia de semejanza. Identificándolas con parejas de matrices cuadradas, podemos utilizar la técnica de las deformaciones miniversales para averiguar, dada una pareja de tensores cualquiera, cuáles son las parejas de tensores que se pueden obtener al perturbar ligeramente la dada. Las clases de equivalencia se pueden identificar con las órbitas que resultan al actuar un grupo de Lie sobre la variedad diferenciable de las parejas de matrices simétricas. Presentamos también las dimensiones que son posibles para dichas órbitas.

En todo el trabajo, nos restringiremos al caso de matrices cuadradas de orden tres.

**Sección en el CEDYA 2007:** Análisis matricial y teoría matemática de sistemas de control

## Referencias

- [1] V.I. Arnold, *On matrices depending on parameters*. Uspekhi Mat. Nauk. 26, 1971, pp. 29-43.
- [2] M. A. Barja, I. Carol, F. Planas, E. Rizzi, *The representation problem of pairs of symmetric second-order tensors in the context of Solid Mechanics*.  
Accesible en: <http://www.ma1.upc.edu/recerca/preprints/03/0301planas.abs>
- [3] F. Puerta, *Álgebra lineal*. Edicions upc, 2005.
- [4] A. Tannenbaum, *Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects*, Lecture Notes in Mathematics 845, Springer-Verlag, 1981.
- [5] S. P. Timoshenko, *Resistencia de materiales*. Espasa-Calpe, 1967.

# Estructura geométrica de las clases de equivalencia de un par controlable

JOSEP FERRER, ALBERT COMPTA, MARTA PEÑYA

Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya

Josep.Ferrer@upc.edu, Albert.Compta@upc.edu, Marta.Penya@upc.edu

## Resumen

Dado un par de matrices representando un sistema lineal controlable, se estudian sus clases de equivalencia relativas (separada o conjuntamente) a realimentaciones y a cambios de base en las variables de estado y de salida, así como las intersecciones entre ellas, presentándolas como órbitas bajo la acción de adecuados grupos. En particular se prueba su carácter de variedades diferenciables, se calculan sus dimensiones, se analiza en qué casos resultan cerradas y se aplica al estudio de perturbaciones de sistemas.

**Sección en el CEDYA 2007:** Análisis matricial y teoría matemática de sistemas de control

## Referencias

- [1] V. I. Arnold, *On matrices depending on parameters*. Uspekhi Mat. Nauk. 26, 1971, pp. 29-43.
- [2] J. Ferrer, M. I. García-Planas, F. Puerta, *Brunovsky local form of a holomorphic family of pairs of matrices*. Linear Algebra and its Applications 253 (999) 175-198.
- [3] J. E. Humphreys *Linear algebraic groups*. Springer Verlag, 1981.
- [4] A. Tannenbaum, *Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects*, Lecture Notes in Mathematics 845, Springer-Verlag, 1981.

# El método de los momentos para problemas variacionales no locales

ERNESTO ARANDA

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Castilla - La Mancha

Ernesto.Aranda@uclm.es

RENÉ MEZIAT

Dpto. de Matemáticas, Univ. de los Andes, Bogotá, Colombia

rmeziat@uniandes.edu.co

## Resumen

En este trabajo analizamos un problema variacional no convexo y no local de la forma

$$\min_u \iint_{J \times J} W(x, y, u(x), u(y), u'(x), u'(y)) \, dx \, dy$$

Ciertos modelos energéticos tales como las transiciones de fase, el ferromagnetismo o algunos modelos de fractura mecánica conducen a este tipo de problemas (cf. [1, 3] entre otros). La situación típica en el contexto del cálculo de variaciones es que, en ausencia de ciertas propiedades sobre el integrando  $W$  que garantizan la semicontinuidad inferior débil del funcional integral, las sucesiones minimizantes pueden generar oscilaciones cuyo límite débil no es minimizador del problema. Además, en este tipo de problemas en los que el gradiente aparece repetido, no está claro cómo formular la envoltura semicontinua del mismo, surgiendo así un aspecto diferenciador enorme frente a lo que ocurre en los modelos unidimensionales habituales (cf. [2]).

La idea central desarrollada en este trabajo se basa en el uso de los resultados previos de Pedregal [6] en los que se formula una relajación de este problema en términos de medidas de Young. En el caso particular en el que el integrando  $W$  es un polinomio en las variables correspondientes a las derivadas  $u'$ , es posible la aplicación del *método de los momentos*, desarrollado en [4, 5] para el caso de problemas variacionales escalares unidimensionales, el cual, mediante el uso de los momentos de las mencionadas medidas de Young, permite reformular el problema como un programa matemático con estructura cuadrática y cónica.

El tratamiento llevado a cabo permite, por una parte, abordar la resolución numérica de este tipo de problemas, y por otra, dar alguna luz sobre la envoltura semicontinua inferior de este tipo de funcionales en el caso homogéneo (es decir, cuando  $W$  sólo depende de las derivadas).

**Sección en el CEDYA 2007:** CO

## Referencias

- [1] ALBERTI, G., & BELLETTINI, G. A nonlocal anisotropic model for phase transitions: asymptotic behaviour of rescaled energies. *European Journal of Applied Mathematics* 9 (1998), 261–284.
- [2] BEVAN, J., & PEDREGAL, P. A necessary and sufficient condition for the weak lower semicontinuity of one-dimensional nonlocal variational integrals. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 136, 1 (2006), 23–51.
- [3] BRANDON, D., & ROGERS, R. The coercivity and nonlocal ferromagnetism. *Cont. Mech. Therm.*, 4 (1992), 1–21.
- [4] EGOZCUE, J., MEZIAT, R., & PEDREGAL, P. From a nonlinear, nonconvex variational problem to a linear, convex formulation. *App. Math. Optim.* 47 (2003), 27 – 44.
- [5] MEZIAT, R. *El Método de los Momentos para Problemas Variacionales No Convexos*. Tesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 2001.
- [6] PEDREGAL, P. Nonlocal variational principles. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications* 29, 12 (1997), 1379–1392.

# Control óptimo sobre inestabilidades termoconvectivas

M. C. NAVARRO, H. HERRERO

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Castilla- La Mancha

mariacruz.navarro@uclm.es, henar.herrero@uclm.es

## Resumen

Este trabajo muestra cómo inestabilidades termoconvectivas pueden ser evitadas considerando condiciones de contorno adecuadas para la temperatura que pueden ser determinadas mediante técnicas de control óptimo. Consideramos un problema Rayleigh- Bénard 2D y estudiamos el control óptimo y la estabilidad lineal de flujos termoconvectivos inducidos por gradientes de temperatura horizontales. El control se ejerce mediante un flujo de calor en la parte superior de la frontera del dominio. El problema de control es formulado como un problema de minimización y el funcional a minimizar involucra una medida de la vorticidad del fluido (enstrofia) y una medida de la magnitud del control. Se establece la existencia de control óptimo y las condiciones necesarias de optimalidad siguiendo la línea desarrollada en [1] pero considerando, en este caso, condiciones Newmann para la temperatura en las paredes laterales. Los estados controlados son calculados numéricamente siguiendo el método desarrollado en [2, 3] y su estabilidad lineal es examinada [4]. De los resultados se concluye que estos estados son fuertemente estables para situaciones de gran reducción de la enstrofia.

**Sección en el CEDYA 2007:** CO

## Referencias

- [1] K. Ito and S. S. Ravindran, *Optimal control of thermally convected fluid flows*. Siam J. Sci. Comput. vol. 19, No. 6 (1998), 1847-1869.
- [2] H. Herrero and A. M. Mancho *On pressure boundary conditions for thermoconvective problems*. Int. J. Numer. Meth. Fluids. vol. 39 (2002), 391-402.
- [3] M. C. Navarro, H. Herrero and S. Hoyas *Chebyshev collocation for optimal control in a thermoconvective flow*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. enviado 2005.
- [4] M. C. Navarro and H. Herrero *Optimal control over thermoconvective instabilities*. Physical Review E. enviado 2007.

# Introducción de penalizaciones de giro en el Problema General de Rutas con Capacidades sobre Grafos Mixtos

EULALIA MARTÍNEZ, DAVID SOLER, JOSÉ ALBIACH  
Dpto. de Matemática Aplicada-IMPA, Univ. Politécnica de Valencia  
eumarti@mat.upv.es, dsoler@mat.upv.es, jalbiach@mat.upv.es

## Resumen

Uno de los problemas más importantes en optimización combinatoria es el que tiene relación con el diseño de rutas para una flota de vehículos sobre un grafo mixto, de tal manera que se minimice el coste total del recorrido y se satisfagan con mínimo coste las restricciones de capacidad de los vehículos y la demanda presente en el grafo (ver por ejemplo [1] y [3]). El interés en el estudio de este problema radica fundamentalmente en el gran número de aplicaciones conocidas, cuya solución asegura economías importantes en los costes de ejecución de muchos proyectos. Problemas como el de la recogida de basuras en las grandes ciudades, el reparto de todo tipo de mercancías y el transporte escolar son algunas aplicaciones importantes en esta materia.

Este problema es llamado Problema General de Rutas con Capacidades sobre Grafos Mixtos (PGRM) y puede enunciarse de la siguiente manera:

Sea  $G = (V, E \cup A)$  un grafo mixto fuertemente conexo donde: cada enlace  $(i, j) \in E \cup A$  tiene asociado un coste  $c_{ij} \geq 0$ , el vértice 1 representa un depósito donde hay  $k$  vehículos con idéntica capacidad  $W$ , existe un conjunto  $V_R \subseteq V$  tal que cada vértice  $i \in V_R$  tiene asociada una demanda positiva  $q_i \leq W$ , existe un conjunto  $A_R \subseteq A$  tal que cada arco  $(i, j) \in A_R$  tiene asociada una demanda positiva  $q_{ij} \leq W$ , existe un conjunto  $E_R \subseteq E$  tal que cada arista  $(i, j) \in E_R$  tiene asociada una demanda positiva  $q_{ij} \leq W$  y la suma de todas las demandas no es mayor que  $kW$ .

Encontrar  $k$  tours en  $G$  de forma que cada tour pase por el depósito, las demandas en  $V_R$ ,  $A_R$  y  $E_R$  se satisfagan, cada una por exactamente un tour, la demanda satisfecha por cada tour no supere  $W$  y la suma de los costes de los  $k$  tours sea mínima.

Este problema, al igual que la gran mayoría de los problemas académicos de rutas de vehículos asume que todos los giros son permitidos y que no consumen tiempo (coste) en su realización. Sin embargo, en algunos problemas reales especialmente para rutas dentro de ciudades y en particular para camiones, algunos giros son más costosos y/o peligrosos en su realización. Además, al menos en grandes ciudades, muchos giros en U y algunos giros a izquierda son prohibidos. Por consiguiente, para estos casos la solución dada por la modelización matemática del problema puede no ser posible si se deben respetar las señales de tráfico.

Recientemente, algunos problemas conocidos de rutas de vehículos resueltos sobre grafos han sido generalizados incluyendo penalizaciones de giro y giros prohibidos en el coste de la solución (ver por ejemplo [2] y [4]). Pero por lo que sabemos, este tipo de generalización no se ha realizado para el PGRM, unos de los problemas de rutas más complejos existentes.

En este artículo presentamos una generalización del PGRM que considera penalizaciones de giro y giros prohibidos: el conjunto de los  $k$  tours de la solución óptima al problema debe atravesar todos los vértices requeridos y enlaces (arcos y aristas) requeridos sin realizar giros prohibidos y su coste total será la suma de los costes de los enlaces atravesados junto las penalizaciones asociadas a todos los giros realizados para pasar de un enlace a otro.

Lo importante de esta aportación es que demostramos que existe una transformación en tiempo polinomial de nuestro problema generalizado a otro problema conocido de rutas por arcos, para el que se han descrito en la literatura científica tanto algoritmos exactos como heurísticos para su resolución, por lo que podemos resolver, al menos desde un punto de vista teórico, el problema complejo presentado, tanto de forma exacta como aproximada.

**Sección en el CEDYA 2007:** CO o Matemática Discreta

## Referencias

- [1] J.C. Ángel, D. Soler, A. Hervás. *The capacitated general routing problem on mixed graphs*. Investigación Operacional 23 (2002), 15-26.
- [2] A. Corberán, R. Martí, E. Martínez, D. Soler. *The rural postman problem on mixed graphs with turn penalties*. Computers & Operations Research 29 (2002), 887-903.
- [3] R. Pandit, B. Muralidharan. *A capacitated general routing problem on mixed networks*. Computers & Operations Research 22 (1995), 465-478.
- [4] D. Soler, E. Martínez, J.C. Micó. *A transformation for the mixed general routing problem with turn penalties*. Journal of the Operational Research Society (2007), doi:10.1057/palgrave.jors:2602385.



# COMUNICACIONES

*Jueves 27*





# Comportamiento asintótico de una viga elástica fijada en pequeñas zonas de uno de sus extremos

J. CASADO DÍAZ, M. LUNA LAYNEZ

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla

jcasadod@us.es, mllayne@us.es

F. MURAT

Laboratoire Jacques-Louis Lions, Univ. Pierre et Marie Curie

murat@ann.jussieu.fr

## Resumen

El objetivo de esta comunicación es estudiar el comportamiento asintótico de la solución de un problema de elasticidad lineal planteado sobre la viga delgada  $(0, 1) \times \varepsilon S$ , donde  $S$  es un dominio acotado regular de  $\mathbb{R}^2$  y  $\varepsilon > 0$  tiende a cero. En el extremo  $x_1 = 1$  la viga está fijada en la totalidad de su base, mientras que en el otro extremo,  $x_1 = 0$ , sólo está fijada en la unión de  $N$  pequeñas zonas cuya talla,  $\varepsilon r^\varepsilon$  con  $r^\varepsilon > 0$  tendiendo a cero, es un infinitésimo con respecto al grosor de la viga. Sobre el resto de la frontera se impone una condición de tipo Neumann.

Se podría pensar que el hecho de que las zonas de sujeción en  $x_1 = 0$  sean tan pequeñas hace que su efecto sea inapreciable en el límite. Sin embargo mostramos como esto no es así y encontramos varios comportamientos dependiendo de  $r^\varepsilon$ , el número de zonas y su distribución.

Para  $N = 1$  aparecen tres tallas críticas,  $\varepsilon^3$ ,  $\varepsilon$  y  $\varepsilon^{1/3}$ , y consecuentemente siete regímenes distintos:  $r^\varepsilon \ll \varepsilon^3$ ,  $r^\varepsilon \approx \varepsilon^3$ ,  $\varepsilon^3 \ll r^\varepsilon \ll \varepsilon$ ,  $r^\varepsilon \approx \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll r^\varepsilon \ll \varepsilon^{1/3}$ ,  $r^\varepsilon \approx \varepsilon^{1/3}$ , y  $\varepsilon^{1/3} \ll r^\varepsilon$ . Cuando  $r^\varepsilon$  es un infinitésimo con respecto a  $\varepsilon^3$ ,  $r^\varepsilon \ll \varepsilon^3$ , la zona de sujeción es tan pequeña que el comportamiento límite es el mismo que se obtiene cuando no existe esta zona. Contrariamente en el caso  $\varepsilon^{1/3} \ll r^\varepsilon$  el comportamiento es el que obtendríamos si la viga estuviera fijada en toda la base  $x_1 = 0$ . En los demás casos aparecen ciertos comportamientos intermedios.

Para  $N \geq 2$  el resultado es diferente. En particular, mostramos que si las zonas se concentran alrededor de tres puntos no alineados (por tanto  $N \geq 3$ ) sólo aparecen dos tallas críticas,  $\varepsilon^3$  y  $\varepsilon$ , que conducen a cinco regímenes diferentes:  $r^\varepsilon \ll \varepsilon^3$ ,  $r^\varepsilon \approx \varepsilon^3$ ,  $\varepsilon^3 \ll r^\varepsilon \ll \varepsilon$ ,  $r^\varepsilon \approx \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll r^\varepsilon$ . Es decir, ahora es suficiente que  $\varepsilon$  sea un infinitésimo respecto de  $r^\varepsilon$  para que el comportamiento de la viga sea el mismo que si la tuviésemos fijada en toda la base. Esto prueba matemáticamente como es preferible fijar una viga en una base alrededor de tres puntos no alineados (por ejemplo clavos) a hacerlo alrededor de tan sólo uno, aún cuando utilicemos una zona de mucho mayor grosor.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] J. Casado Díaz, M. Luna Laynez, F. Murat, *Asymptotic behavior of an elastic beam fixed on a small part of one of its extremities*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 338 (2004), 975-980.
- [2] J. Casado Díaz, M. Luna Laynez, F. Murat, *The diffusion equation in a notched beam*. Calculus of Variations and PDE, por aparecer.
- [3] F. Murat, A. Sili, *Comportement asymptotique des solutions du système de l'élasticité linéarisée anisotrope hétérogène dans de cylindres minces*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 328 (1999), 179-184.
- [4] L. Trabucho, J.M. Viaño, *Mathematical modelling of rods*. Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV, North-Holland, 1996.

# Metastable patterns for three or more different phases

A. JIMENEZ CASAS

Grupo de Dinámica No Lineal, Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad Pontificia Comillas de Madrid

ajimenez@upcomillas.es

## Resumen

We consider a generalization of the semilinear phase field model from [1], using a more general density function which describe the phase separation of mixtures of three or more components, instead the binary mixtures. The main objective of this work is to prove the existence of metastable solutions that evolve very slowly in time, for this general model.

Next, we show several numerically experiments to obtain these metastable patterns in bough cases, for the model with two different phases and for more of two different phases.

Finally we consider a general enthalpy function which allows to study more general couplings between a diffusion field and a phase-field. For instance, the phase field can be seen as the density of bacterial collony or the mass of growing tumor. Analogously, the diffusion field can stand for the density of nutrient. In this case we prove also the existence of the metastable solutions of the generalized system.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] A. Jiménez-Casas, A. Rodríguez-Bernal, *Linear stability analysis and metastable solutions for a phase-field model*, Proceeding of the Royal Society of Edimburgh, **129A**, 571-600, (1999).

# Simetrías potenciales de un modelo matemático que describe las vibraciones de una viga

M.S. BRUZÓN, J.C. CAMACHO

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Cádiz

matematicas.casem@uca.es, josecarlos.camacho@uca.es

## Resumen

El comportamiento de las vibraciones del puente Golden Gate de San Francisco motivó a McKenna y otros [7, 8, 9] a estudiar las soluciones “ondas viajeras” de la ecuación de viga no lineal

$$u_{tt} + u_{xxxx} + f(u) = 0. \quad (1)$$

La ecuación (1) describe la propagación de las ondas de flexión que produce una barra rectangular cuando existen pequeñas vibraciones transversales. El eje  $OX$  se corresponde con el eje longitudinal de la barra en su posición de equilibrio,  $x$  es la coordenada espacial,  $t$  la coordenada temporal,  $u(x, t)$  mide el desplazamiento transversal y el término  $f(u)$  representa el efecto que debe realizar el cable que sostiene la viga para contrarrestar la fuerza de la gravedad.

El método clásico de Lie permite obtener transformaciones por simetrías que reducen el número de variables independientes de una ecuación en derivadas parciales. Motivados por el hecho de que muchas ecuaciones en derivadas parciales admiten reducciones por simetrías que no se obtienen utilizando el método clásico de Lie han surgido muchas generalizaciones de este método:

- En el estudio de las reducciones por simetrías de la ecuación del calor, Bluman y Cole [1] desarrollaron el método no clásico.
- En [2] Bluman y Kumei introdujeron un nuevo método con el fin de encontrar nuevas clases de simetrías para ecuaciones en derivadas parciales escritas en forma conservada: las simetrías potenciales.
- En [5, 6] Gandarias introdujo una nueva clase de simetrías para ecuaciones en derivadas parciales. Estas simetrías son denominadas simetrías potenciales no clásicas y se hallan a partir de las simetrías no clásicas del sistema asociado.

Las simetrías clásicas de (1) fueron estudiadas por Bruzón, Camacho y Ramírez en [3] y las simetrías no clásicas por Camacho y Bruzón en [4]. En este trabajo presentamos un estudio, desde el punto de vista de la teoría de las simetrías potenciales clásicas y no clásicas para ecuaciones en derivadas parciales, del modelo que describe las vibraciones de una viga (1) y comparamos las simetrías potenciales con las simetrías locales halladas en [3, 4].

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] G.W. Bluman, J.D. Cole, *Similarity methods for differential equations*, Springer, 1974.
- [2] G.W. Bluman, S. Kumei, *Symmetries and differential equations*, Springer, 1989.
- [3] M.S. Bruzón, J. Ramírez, J.C. Camacho, *Modelo de vibraciones de una viga. Reducciones por simetrías*, 3ra. Conferencia Iberoamericana en Sistemas, Cibernética e Informática, 2004, 368-373.
- [4] J.C. Camacho, M.S. Bruzón, *Simetrías no clásicas de un Modelo de vibraciones de viga*, NOLINEAL, 2004.
- [5] M.L. Gandarias, *Simetrías no clásicas y potenciales no clásicas de una ecuación de Fokker-Planck*, XV Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones/ V Congreso de Matemática Aplicada, (1997), 435-440.
- [6] M.L. Gandarias, *Centre de Recherche Mathématiques CRM Proceedings and Lecture Notes*, (2000), 285-290.
- [7] A.C. Lazer, P.J. McKenna, *Large Scale Oscillation Behavior in Loaded Asymmetric Systems*. Ann. Inst. H-Poincaré, Analyse Nonlineaire, (1987), 244-274.
- [8] P. J. McKenna, W. Walter, *Nonlinear Oscillation in a Suspension Bridge*, Arch. Rational Mech. Anal., (1987), 167-177.
- [9] P. J. McKenna, W. Walter, *Travelling waves in a suspension bridges*, SIAM J. Applied Mathematics, (1990), 703-715.

# Estudio asintótico de las vibraciones de un cuerpo con una masa concentrada en una superficie

D. GÓMEZ, M. LOBO

Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación, U. de Cantabria

gomezdel@unican.es, miguel.lobo@unican.es

E. PÉREZ

Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación, U. de Cantabria

meperez@unican.es

## Resumen

El problema que aquí consideramos es un modelo matemático sobre las vibraciones de un cuerpo que contiene en su interior una región muy delgada donde la densidad es mucho mayor que en el resto, la denominada *masa concentrada sobre una superficie*. Diversos autores han abordado el comportamiento de sistemas vibratorios con masas concentradas en puntos (cf. [4] para una extensa bibliografía), mientras que sólo tenemos referencia de los trabajos en [1], [2], [3] y [5] relativos a masas concentradas sobre curvas o superficies.

Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^3$  con frontera regular  $\partial\Omega$ . Supondremos que  $\Omega$  queda dividido en dos partes  $\Omega_+$  y  $\Omega_-$  por la superficie  $\gamma$ :  $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \gamma$ . Para simplificar, supondremos que el plano  $\{x_3 = 0\}$  corta a  $\Omega$  y que  $\gamma = \Omega \cap \{x_3 = 0\}$ . Sea  $\varepsilon$  un pequeño parámetro estrictamente positivo que haremos tender a cero. Denotaremos por  $\omega_\varepsilon$  el entorno de  $\gamma$  de espesor  $\varepsilon$ , esto es  $\omega_\varepsilon = \Omega \cap \{|x_3| < \varepsilon\}$ , y por  $\Omega_\varepsilon$  el dominio  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{\omega}_\varepsilon$ .

Consideramos en  $\Omega$  el problema de valores propios:

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon = \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon u^\varepsilon & \text{en } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde  $\rho_\varepsilon$  es la función densidad

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} p & \text{si } x \in \Omega_\varepsilon, \\ q\varepsilon^{-m} & \text{si } x \in \omega_\varepsilon, \end{cases}$$

con  $m$  un parámetro positivo, y  $p$  y  $q$  constantes positivas. Para cada  $\varepsilon > 0$ , sean  $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$  la sucesión de valores propios de dicho problema y  $\{u_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$  las correspondientes funciones propias normalizadas en un determinado espacio. Dependiendo del valor que tome el parámetro  $m$  aparece distinto comportamiento asintótico de  $(\lambda^\varepsilon, u^\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon$  tiende a cero. En [3] caracterizamos el comportamiento asintótico de los valores propios  $\lambda_n^\varepsilon$  y de las correspondientes funciones propias  $u_n^\varepsilon$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , esto es, valores propios de orden  $O(\varepsilon^{m-1})$  para  $m > 1$ . Aquí, mediante desarrollos asintóticos, caracterizamos comportamientos límites de frecuencias propias de otros órdenes de magnitud más grandes, i.e.,  $\lambda_{n(\varepsilon)}^\varepsilon$  con  $n(\varepsilon) \rightarrow \infty$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] Yu. D. Golovaty, D. Gómez, M. Lobo, and E. Pérez. *Asymptotics for the eigenelements of vibrating membranes with very heavy thin inclusions*, C. R. Mecanique **330** (2002), 777–782.
- [2] Yu. D. Golovaty, D. Gómez, M. Lobo, and E. Pérez. *On vibrating membranes with very heavy thin inclusions*, Math. Models Methods Appl. Sci. **14** (2004), 987–1034.
- [3] D. Gómez, M. Lobo, and E. Pérez. *Sobre vibraciones de baja frecuencia de un cuerpo con una masa concentrada sobre una superficie*, Actas del XIX CEDYA, Universidad Carlos III.
- [4] M. Lobo, and E. Pérez. *Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review*, C.R. Mecanique, **331** (2003), 303–317.
- [5] H. Tchatat. “Perturbations Spectrales pour des systèmes avec masses concentrées”, Thèse 3<sup>eme</sup> cycle. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI. Paris, 1984.

# Atractores en dominios tipo dumbbell

GERMÁN LOZADA-CRUZ

Dpto. de Matemáticas, IBILCE,  
UNESP-Universidade Estadual Paulista,  
São José de Rio Preto, SP, Brasil

german@ibilce.unesp.br

JOSÉ M. ARRIETA

Dpto. de Matemática Aplicada,  
Universidad Complutense de Madrid

arrieta@mat.ucm.es

ALEXANDRE N. CARVALHO

Dpto. de Matemática, ICMC,  
USP-Universidade de Sao Paulo,  
Sao Carlos, SP, Brasil

andcarva@icmc.usp.br

## Resumen

En este trabajo consideramos una ecuación de reacción difusión del tipo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u = f(u), & x \in \Omega_\epsilon, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega_\epsilon, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^N$  es un dominio acotado y regular,  $\epsilon \in (0, 1]$  y  $f$  es una cierta no linealidad. El tipo de perturbación de dominio en el que estamos interesados es el llamado dominio tipo “dumbbell”,  $\Omega_\epsilon = \Omega \cup R_\epsilon$ , donde  $\Omega$  es la unión de dos dominios disconexos fijos  $\Omega = \Omega_L \cup \Omega_R$  y  $R_\epsilon$  es un canal fino que une  $\Omega_L$  y  $\Omega_R$ . Este canal degenera a una línea a medida que el parámetro  $\epsilon \rightarrow 0$ . El dominio límite consiste por tanto en los dos dominios fijos y una línea, que denotaremos por  $R_0$ , que los une. De esta forma, la ecuación límite viene dada por

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + w = f(w), & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \\ v_t - Lv + v = f(v), & s \in R_0 \\ v(p_0) = w(p_0), v(p_1) = w(p_1) \end{cases} \quad (2)$$

donde  $L$  es un cierto operador diferencial que depende de la geometría del del canal  $R_\epsilon$ .

Si la no linealidad es disipativa, ambos problemas (1) y (2) tienen un atractor,  $\mathcal{A}_\epsilon$  y  $\mathcal{A}_0$ . En este trabajo, analizaremos la relación que existe entre ambos atractores. En el trabajo [1] mostramos que los puntos de equilibrio se comportan de forma continua. En este trabajo mostraremos que los flujos respectivos se comportan también de forma continua y probaremos que los atractores son semicontinuos superiormente.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] J.M. Arrieta, A. N. Carvalho, G. Lozada-Cruz, *Dynamics in dumbbell domains I. Continuity of the set of equilibria*, Journal of Differential Equations 231, 551-597 (2006).

# Asymptotic Expansions of the Hurwitz-Lerch Zeta Function

CHELO FERREIRA

Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

cferrei@unizar.es

JOSÉ L. LÓPEZ

Dpto. de Ingeniería Matemática e Informática, Univ. Pública de Navarra

jl.lopez@unizar.es

## Resumen

The Hurwitz-Lerch Zeta function  $\Phi(z, s, a)$  is considered for large and small values of  $a \in \mathbf{C}$ , and for large values of  $z \in \mathbf{C}$ , with  $|\text{Arg}(a)| < \pi$ ,  $z \notin [1, \infty)$  and  $s \in \mathbf{C}$ . This function is originally defined as a power series in  $z$ , convergent for  $|z| < 1$ ,  $s \in \mathbf{C}$  and  $1 - a \notin \mathbf{N}$ . An integral representation is obtained for  $\Phi(z, s, a)$  which define the analytical continuation of the Hurwitz-Lerch Zeta function to the cut complex  $z$ -plane  $\mathbf{C} \setminus [1, \infty)$ . From this integral we derive three complete asymptotic expansions for either large or small  $a$  and large  $z$ . These expansions are accompanied by error bounds at any order of the approximation. Numerical experiments show that these bounds are very accurate for real values of the asymptotic variables.

**Sección en el CEDYA 2007:** otros temas

## Referencias

- [1] T. M. Apostol, *On the Lerch zeta function*. Pacific J. Math., **1** (1951) 161-167.
- [2] D. Klusch, *On the Taylor expansion of the Lerch zeta-function*, J. Math. Anal. Appl., **170** (1992) 513-523.
- [3] D. Klusch, *Note sur la fonction  $\mathcal{R}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2k\pi ix} / (w+k)^s$* , Acta Math., **11** (1887) 19-24.
- [4] H. M. Srivastava, *Sums of certain series of the Riemann zeta function*, J. Math. Anal. Appl., **134** (1988) 129-140.

# Integrales primeras de Weierstrass en sistemas diferenciales polinomiales planos

JAUME GINÉ, MAITE GRAU

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Lleida

gine@matematica.udl.es, mtgrau@matematica.udl.es

## Resumen

Este trabajo se enmarca en el problema de la integrabilidad de sistemas diferenciales polinomiales planos. Más específicamente estudiaremos sistemas polinomiales de la forma:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios en  $\mathbb{C}[x, y]$ . Obviamente, podemos también expresar el sistema (1) mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (2)$$

Aunque no siempre podemos resolver explícitamente el sistema (1), podemos ocasionalmente encontrar integrales primeras que son funciones no constantes  $H(x, y)$ , analíticas en un abierto de  $\mathbb{C}^2$  y que son constantes sobre las curvas soluciones de ese conjunto. Para lograr eso consideramos la forma diferencial  $Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0$ . Si  $\partial P/\partial x = -\partial Q/\partial y$ , entonces  $H(x, y) = \int Qdx - Pdy$  es una integral primera. Si  $\partial P/\partial x \neq -\partial Q/\partial y$ , en ciertos casos existen métodos ad hoc para encontrar factores integrantes, es decir, una función  $R(x, y)$  tal que  $\partial(RP)/\partial x = -\partial(RQ)/\partial y$ . En el caso en que podamos encontrar esa función  $R$ ,  $H(x, y) = \int RQdx - RPdy$  es una integral primera. Por ejemplo, si  $(\partial Q/\partial x + \partial P/\partial y)/P$  es independiente de  $y$ , entonces  $R = \exp(\int (\partial Q/\partial x + \partial P/\partial y)/P dx)$  es un factor integrante.

Recordemos que el problema de la integrabilidad consiste en encontrar la clase de funciones más simple a la cual pertenece una integral primera del sistema (1). Por ejemplo en [7], Poincaré estableció el problema de determinar cuando el sistema (1) posee integral primera racional. Los trabajos de [8] y [9] caracterizan cuando un el sistema (1) posee integral primera elemental o Liouvilliana. Una definición precisa de estas clases de funciones es dada en [8, 9]. Un hecho importante en estos resultados es que las curvas invariantes y los factores exponenciales juegan un papel fundamental en la caracterización. Además, la caracterización esta expresada en términos del inverso de factor integrante. En este trabajo, recordaremos y completaremos algunos resultados sobre la integrabilidad del sistema (1) en términos de integrales primeras de Weierstrass.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] J. CHAVARRIGA, H. GIACOMINI, J. GINÉ, AND J. LLIBRE, *Darboux integrability and the inverse integrating factor*, J. Differential Equations **194** (2003), 116–139.
- [2] C. CHRISTOPHER, *Liouvillian first integrals of second order polynomial differential equations*, Electron. J. Differential Equations **1999**, No. 49, 7 pp. (electronic)
- [3] I.A. GARCÍA, H. GIACOMINI, AND J. GINÉ, *Generalized nonlinear superposition principles for polynomial planar vector fields*, J. Lie Theory **15** (2005), 89–104.
- [4] I.A. GARCÍA, AND J. GINÉ, *Generalized cofactors and nonlinear superposition principles*, Appl. Math. Lett. **16** (2003), 1137–1141.
- [5] H. GIACOMINI, AND J. GINÉ, *An algorithmic method to determine integrability for polynomial planar vector fields*, European J. Appl. Math. **17** (2006), no. 2, 161–170.
- [6] P. PAINLEVÉ, *Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale est de la forme  $h(x)(y-g_1(x))^{\lambda_1}(y-g_2(x))^{\lambda_2}\cdots(y-g_n(x))^{\lambda_n} = C$* , Ann. Fac. Sc. Univ., Toulouse (1896), 1–37; reprinted in Œuvres, tome 2, 546–582
- [7] H. POINCARÉ, *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*, Rend. Circ. Mat. Palermo **5** (1981), 161–191.
- [8] M.J. PRELLE, AND M.F. SINGER, *Elementary first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **279** (1983), 215–229.
- [9] M.F. SINGER, *Liouvillian first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 673–688.

## $J_2$ effect and the collision restricted three–body problem

J.M. CORS

Departament de Matemàtica Aplicada III, Universitat Politècnica de Catalunya.

cors@epsem.upc.edu

E. BARRABÉS, J. SOLER

Dept. d'Informàtica i Matemàtica Aplicada, Universitat de Girona.

esther.barrabes@ima.udg.es, jaume.soler@ima.udg.es

C. PINYOL

Departament d'Economia i Història Econòmica, Universitat Autònoma de Barcelona

Conxita.Pinyol@uab.es

### Resumen

The existence of a new class of inclined periodic orbits of the collision restricted three–body problem is shown. The symmetric periodic solutions found are perturbations of elliptic kepler orbits and they exist only for special values of the inclination and are related to the motion of a satellite around an oblate planet.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO, Dynamical systems and celestial mechanics.



# Phase portraits of separable Hamiltonian systems

CHARA PANTAZI, ANTONI GUILLAMON

Dept. de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya

chara.pantazi@upc.edu, antoni.guillamon@upc.edu

## Resumen

We study some generalizations of potential Hamiltonian systems ( $H(x, y) = y^2 + F(x)$ ) with one degree of freedom. In particular, we are interested in Hamiltonian systems with Hamiltonian functions of type  $H(x, y) = F(x) + G(y)$  or  $H(x, y) = y^2 G(x) + F(x)$ , both arising in applied mechanical problems. We present an algorithm to plot the phase portrait of any Hamiltonian system of type  $H(x, y) = F(x) + G(y)$ , where  $F$  and  $G$  are arbitrary polynomials. We are able to give the full description in the Poincaré disk according to the graphs of  $F$  and  $G$ , extending the well-known method for the “finite” phase portrait potential systems.

In particular, the algorithm allows to establish the boundedness of the basins of attraction of the centers, which gives some information about the period function of those centers. In the frequent case of coexistence of centers, it is an interesting problem to know the “simultaneous” period functions. In the family of systems that we study, and for which we have a control of the centers’ locations, we also study (using the techniques introduced in [1]) the relationship between the period functions of different centers. This can give, for the mechanical systems associated, an idea of the duration of the oscillations according to the initial positions.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] E. Freire, A. Gasull, A. Guillamon *Phase portrait of First derivative of the period function with applications*, Journal of Differential Equations **204** (2004), 139–162.

# Qualitative features of Hamiltonian systems through averaging and reduction

H. SCOTT DUMAS, KENNETH MEYER

Dpt. of Mathematics, Univ. of Cincinnati

scott.dumas@uc.edu, ken.meyer@uc.edu

JESÚS PALACIÁN, PATRICIA YANGUAS

Dpto. de Ingeniería Matemática e Informática, Univ. Pública de Navarra

palacian@unavarra.es, yanguas@unavarra.es

## Resumen

Let us consider a small parameter which is a measure of the perturbation of an integrable system where all the solutions are periodic. Then let us normalize (or average) the perturbation term by term in the small parameter. After a finite number of terms have been normalized the higher order perturbations are truncated thus obtaining an approximation of the full system. This approximation is well defined on the lower dimensional reduced space. Being lower dimensional, sometimes just two-dimensional, the system on the reduced space is easier to understand, see for example [2]. By studying the reduced flow it is possible to obtain information on the existence, stability, and bifurcation of periodic solutions of the departure problem. It is even possible to get approximate invariant tori and other higher dimensional invariant structures. However, not all the features of the reduced system accurately portray the original full system. It typically does not see the breakdown of invariant tori, ergodic regions, solenoids, etc.

We shall illustrate the case of regular and singular reductions pointing out the differences and peculiarities of each of them.

The goal of this presentation is to state results which have hypotheses on the reduced system and have conclusions about the full system and apply them to an example of a restricted three-body system. We shall perform two reductions, first a regular one and then a singular one. We will discuss then existence of families of periodic orbits, families of KAM tori and bifurcations of them extracted from the two reduction processes.

The theory has been developed in [1].

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] H.S. Dumas, K. Meyer, J.F. Palacián and P. Yanguas, *Averaging in Celestial Mechanics: Regular Case*, submitted, 2007.
- [2] K. R. Meyer and G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Appl. Math. Sci. 90, Springer-Verlag, New York, 1992.

# Un teorema de existencia y unicidad de soluciones periódicas en ecuaciones de Liénard lineales a trozos

JAUME LLIBRE

Dpto. de Matemáticas, Univ. Autónoma de Barcelona

jllibre@mat.uab.cat

ENRIQUE PONCE, FRANCISCO TORRES,

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Sevilla

eponcem@us.es, ftorres@us.es

## Resumen

La caracterización de la existencia y unicidad de soluciones periódicas para las ecuaciones de Liénard es un problema que ha producido una ingente cantidad de resultados bajo diferentes hipótesis, véase [1]. Un requisito muy común es exigir que las funciones involucradas sean suaves, con lo que no está garantizada la aplicación de estos resultados al caso en que las funciones sean no continuas.

Como un primer paso para resolver este problema se presenta un teorema de existencia y unicidad de soluciones periódicas de una ecuación de Liénard donde los términos de la misma son funciones discontinuas lineales a trozos. En concreto, consideramos una ecuación de la forma  $x'' - f(x)x' + g(x) = 0$ , donde

$$f(x) = \begin{cases} T_1, & \text{si } x < 0, \\ T_2, & \text{si } x > 0, \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} D_1x + a, & \text{si } x < 0, \\ D_2x + b, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En esta ecuación, las funciones  $f$  y  $g$  son suaves a trozos y discontinuas en el origen. Mediante el clásico cambio de Liénard,

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds, \quad y = F(x) - x'$$

la ecuación anterior se transforma en el sistema

$$\begin{aligned} x' &= F(x) - y, \\ y' &= g(x). \end{aligned}$$

Si bajo la hipótesis de determinantes positivos  $D_1, D_2 > 0$ , ahora exigimos  $a < 0$ ,  $b > 0$ , aseguramos la no existencia de equilibrios en las zonas  $x \neq 0$ . Por otra parte, resulta que este sistema posee un pseudo-equilibrio en el origen.

En el trabajo se estudian las condiciones que implican la inestabilidad del pseudo-equilibrio en el origen y la aparición de una única órbita periódica hiperbólica. Para concluir la unicidad, utilizamos argumentos en el espíritu de resultados análogos, véase [2].

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] Zhang Zhi-Fen et al., *Qualitative Theory of Differential Equations*, Translations of Mathematical Monographs, AMS 101, 1992, Providence, Rhode Island.
- [2] W.A. Coppel, *Some Quadratic Systems with at most One Limit Cycle*, Dynamics Reported, vol. 2, John Wiley & Sons, 1989, pp. 61–88.

# Un método RKN diagonalmente implícito para problemas stiff oscilatorios de segundo orden

J.M. FRANCO, I. GÓMEZ

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Zaragoza

jmf franco@unizar.es, igomez@unizar.es

## Resumen

En el presente trabajo estamos interesados en la resolución numérica de problemas stiff oscilatorios asociados a problemas de valor inicial (PVI) de segundo orden de la forma

$$M\ddot{q} + Kq = f(t, q), \quad q(t_0) = q_0, \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0, \quad (1)$$

donde la matriz de masas  $M$  y la matriz de rigidez  $K$  son simétricas y definidas positivas, y  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$  representan, respectivamente, la primera y segunda derivadas del vector desplazamiento  $q$  con respecto al tiempo. Este tipo de problemas surgen en distintas áreas de la ingeniería y las ciencias aplicadas tales como elastodinámica, mecánica de estructuras, sismología o cuando ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) de segundo orden en el tiempo son semidiscretizadas en las variables espaciales. En particular, cuando la malla espacial es refinada, las EDPs semidiscretizadas dan lugar a PVI que son arbitrariamente stiff. Cuando se aplican métodos explícitos para resolver esta clase de problemas el tamaño del paso de integración queda limitado por la frecuencia de mayor magnitud ( $\Delta t = \mathcal{O}(\omega_{max}^{-1})$ ), lo que da lugar a pasos excesivamente pequeños. Por lo tanto, para una resolución eficiente de problemas stiff cuya solución esta dominada por las componentes de baja frecuencia, se requiere de un método implícito que sea incondicionalmente estable.

En la literatura científica se han propuesto diversos métodos Runge–Kutta–Nyström implícitos incondicionalmente estables para resolver problemas stiff (1), siendo la mayoría de ellos de tipo diagonalmente implícito (DIRKN) (ver ref. [1–3]). El principal atractivo de los métodos DIRKN proviene de la estructura de su matriz de coeficientes, que da lugar a una reducción del coste algebraico involucrado en la resolución de las etapas internas cuando se utilizan iteraciones de tipo Newton. Recientemente, Alonso-Mallo et al. [1] han realizado un detallado análisis de la estabilidad lineal de los métodos RKN y han construido un método DIRKN incondicionalmente estable que presenta un mejor comportamiento que otros métodos cuando las soluciones de los problemas stiff combinan componentes dominantes de frecuencias cortas con componentes de frecuencias largas y pequeñas amplitudes.

Motivados por los resultados numéricos obtenidos en [1], nuestro propósito se centra en el diseño y construcción de un método DIRKN que resulte práctico y eficiente en la resolución de distintos problemas stiff del tipo (1) que aparecen en las aplicaciones prácticas. Así, hemos obtenido un método DIRKN A–stable de orden 4 con orden 2 en las etapas, que además, satisface ciertas condiciones algebraicas asociadas a las componentes de frecuencias largas y pequeñas amplitudes (componentes stiff) que pueden aparecer en las soluciones de los problemas stiff considerados. El nuevo método ha sido aplicado a la resolución de distintos problemas oscilatorios de tipo stiff, y los resultados numéricos obtenidos muestran una importante mejora en el comportamiento cuando se comparan con los obtenidos por otros códigos DIRKN propuestos en la literatura científica como el reciente código de Alonso-Mallo et al. [1] y el más clásico de Sharp et al. [3].

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] I. Alonso-Mallo, B. Cano and M.J. Moreta. *Stability of Runge–Kutta–Nyström methods*. J. Comput. Appl. Math., **189** (2006) 120–131.
- [2] J.M. Franco, I. Gómez and L. Rández. *Four–stage symplectic and P–stable SDIRKN methods with dispersion of high order*. Numer. Algorithms, **26** (2001) 347–363.
- [3] P.W. Sharp, J.M. Fine and K. Burrage. *Two-stage and three-stage diagonally implicit Runge–Kutta–Nyström methods of order three and four*. IMA J. Numer. Anal., **10** (1990) 489–504.

# Una Bifurcación Global de Órbitas periódicas en Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos

JAVIER ROS PADILLA, VICTORIANO CARMONA CENTENO,  
ENRIQUE PONCE NÚÑEZ

Dpto. de Matemática Aplicada II, Univ. de Sevilla

javieros@us.es, vcarmona@us.es, eponcem@us.es

## Resumen

En diferentes dispositivos físicos y electrónicos surge de manera natural el fenómeno de la saturación. Este fenómeno suele modelarse actualmente con funciones lineales a trozos, pues éstas parecen adaptarse de manera más fiel al proceso inherente de saturación (ver, por ejemplo, [4]). Esto se traduce en la necesidad de considerar sistemas dinámicos lineales a trozos para el análisis de los dispositivos. Este es el caso de un circuito en puente de Wien polarizado de forma asimétrica, cuyo comportamiento se rige, después de adecuados cambios de variables, por el sistema lineal a trozos con tres zonas

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \text{sat}(x_1) + \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}, \quad (1)$$

donde  $T, D, a, b$  y  $c$  dependen de los valores de las componentes del circuito y  $\text{sat}$  es la función de saturación normalizada

$$\text{sat}(x_1) = \begin{cases} \text{sign}(x_1) & \text{si } |x_1| > 1, \\ x_1 & \text{si } |x_1| \leq 1. \end{cases}$$

En este circuito y en otros similares es de gran importancia analizar su comportamiento periódico (oscilaciones automantenidas). Es decir, desde el punto de vista dinámico, resulta interesante estudiar los ciclos límites del sistema (1).

Presentamos en esta comunicación, en primer lugar, un mecanismo para explicar la aparición de un ciclo límite bizonal para el sistema (1). El estudio de esta conducta bizonal se basa en las denominadas ecuaciones de cierre que permiten dar expresiones para la amplitud y el periodo de la oscilación. Esta técnica ya ha sido explotada con éxito en sistemas planos y tridimensionales simétricos y en sistemas bizonales tridimensionales (véanse [1], [2] y [3]).

En segundo lugar, mostramos, modificando el valor de una resistencia en el circuito, la continuación del ciclo límite bizonal cuando ocupa las tres zonas de linealidad. Ahora, las expresiones de amplitud y periodo anteriores dejan de tener sentido aunque el ciclo límite continúa existiendo hasta un determinado valor de la resistencia. En ese momento, el ciclo límite desaparece, debido a una bifurcación de carácter global que ocurre cuando el único punto de equilibrio del sistema (1) está sobre una de las líneas de separación entre las diferentes regiones lineales. Para este valor de la resistencia, el punto de equilibrio es globalmente atractivo, no estable, y el sistema posee un continuo de homoclinas, lo que explica la desaparición del ciclo límite con amplitud finita y periodo infinito.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDO

## Referencias

- [1] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E., Ros, J. & F. Torres, *Limit cycle bifurcation in 3D continuous piecewise linear systems with two zones: application to Chua's circuit*, International Journal of Bifurcation and Chaos, **15**, (2005), 3153–3164.
- [2] Freire, E., Ponce E. & Ros, J. *Limit cycle bifurcation from a center in symmetric piecewise linear systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos, **9**, (1999), 895–907.
- [3] Freire, E., Ponce E. & Ros, J. *The Focus-Center-Limit Cycle Bifurcation in Symmetric 3D Piecewise Linear Systems*, Siam Journal of Applied Mathematics **65**, (2005), 1933–1951.
- [4] Kriegsmann, G.A. *The rapid bifurcation of the Wien bridge oscillator*, IEEE Trans. Circuit Syst., **34**, (1987), 1093–1096.

# The Restricted 3-Body Problem on $S^1$ : regularization and a particular solution.

LUIS FRANCO-PÉREZ, ERNESTO PÉREZ-CHAVELA

Dpto. de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa

matl@xanum.uam.mx, epc@xanum.uam.mx

## Resumen

One of the most famous problems in Mathematics is *The 3-Body Problem*. It consists in describing the dynamics of three punctual masses in an euclidean space, interacting among themselves through no other forces than their mutual gravitational attraction according to Newton's law. Due to the difficulty of founding the explicit solutions to this problems, there are simpler formulations. In 1772, Euler proposed the most studied of these, known as *The Restricted 3-Body Problem*, which is a limit case of *The 3-Body Problem*. It considers two masses depicting circular paths about their center of mass with constant angular velocity on a plane, and the third is a negligible mass such that the formers don't realize of the existence of the latter. The objective is to determine the dynamics of the negligible mass (see Boccaletti et. al. [1]). Nowadays, there no more than partial results in these problems, so here we present a variant of *The Restricted 3-Body Problem*.

First, we begin defining *The 2-Body Problem on  $S^1$*  and we regularize it through a coordinate transformation that includes a change on time variable, following Érdi [2]. Then we show the global dynamics for all time.

Second, we state *The Restricted 3-Body Problem on  $S^1$*  and clasify it in four cases: *the elliptic*, *the parabolic* and *the hyperbolic* cases and the case *with two fixed centers*, according to solutions of *The 2-Body Problem on  $S^1$* . Afterwards, we regularize all the singularities due to binary collisions through one transformation of coordinates and a time-rescaling. The hamiltonian structure of the problem is preserved and we get a hamiltonian which depicts the dynamics of the negligible mass for all time while there is no total collision.

Finally, we outline the global dynamics of *The Restricted 3-Body Problem on  $S^1$  with two fixed centers* and exhibit a particular solution that is free from binary collisions and happens only in the *hyperbolic* case.

**Sección en el CEDYA 2007:** ODE

## Referencias

- [1] D.Boccaletti, G.Puccaco, *Theory of Orbits*, Vol.1, Springer-Verlag Berlín, Alemania, 2001.
- [2] Bálint Érdi, *Global Regularization of the Restricted Problem of Three Bodies*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **90**: 35-42, 2004.

# Variants of global Carleman weights in one-measurement inverse problems and fluid-structure controllability problems

AXEL OSSES, ALBERTO MERCADO

Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, Casilla 170/3 - Correo 3, Santiago, Chile and Centro de Modelamiento Matemático, UMI 2807 CNRS-Uchile, Chile.

<http://www.dim.uchile.cl/~axoses>, [axoses@dim.uchile.cl](mailto:axoses@dim.uchile.cl), [mercado@dim.uchile.cl](mailto:mercado@dim.uchile.cl)

LUCIE BAUDOIN

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, LAAS - CNRS, 7 avenue du Colonel Roche, 31 077 Toulouse Cedex 04, France.

[baudouin@laas.fr](mailto:baudouin@laas.fr)

MURIEL BOULAKIA

Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

[boulakia@ann.jussieu.fr](mailto:boulakia@ann.jussieu.fr)

ANNA DOUBOVA

Departamento E.D.A.N., Universidad de Sevilla, Tarfia s/n, E-41012 Sevilla, Spain

[doubova@us.es](mailto:doubova@us.es)

JEAN.-PIERRE. PUEL

Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université de Versailles St-Quentin, 45 avenue des Etats Unis, 78035 Versailles cedex, France

[jppuel@cmapx.polytechnique.fr](mailto:jppuel@cmapx.polytechnique.fr)

## Resumen

Some variants of global Carleman weights and Carleman inequalities applied to singular controllability and inverse problems partially developed by the authors are presented in a review. First of all, we explain how to modify weights to study one measurement inverse problems for the heat and wave equations with discontinuous coefficients in the principal part and in a case of locally supported boundary observations for recovering coefficients in the wave equation. As another important application, we show how time-variable global Carleman weights are applied to study the null-controllability for a Navier-Stokes-rigid solid problem in variable domains.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] L. Baudouin, A. Mercado, A. Osses, *Global Carleman estimates in a transmission problem for the wave equation. Application to a one-measurement inverse problem*. Inverse Problems, 23, (2007), 1–22.
- [2] M. Bellassoued, M. Yamamoto, *Inverse source problem for a transmission problem for a parabolic equation*. J. Inv. Ill-Posed Problems 14(1) (2006), 47–56.
- [3] M. Bellassoued, M. Yamamoto, *Logarithmic stability in determination of a coefficient in an acoustic equation by arbitrary boundary observation*, J. Math. Pures Appl. 85 (2006), 193–224.
- [4] A. Benabdallah, P. Gaitan and J. Le Rousseau. *Stability of discontinuous diffusion coefficients and initial conditions in an inverse problem for the heat equation*. Preprint LATP - Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités, CNRS : UMR 6632, Université Aix-Marseille I, France, May 2006.
- [5] M. Boulakia, A. Osses, *Two-dimensional local null controllability of a rigid structure in a Navier-Stokes fluid*. Preprint 139, U. de Versailles Saint-Quentin, France, October 2005. To appear in ESAIM-COCV. Accepted on 28/09/2006.
- [6] A. Doubova, A. Osses, J.-P. Puel, *Exact controllability to trajectories for semilinear heat equations with discontinuous diffusion coefficients*. A tribute to J. L. Lions. ESAIM Control Optim. Calc. Var. 8 (2002), 621–661.
- [7] A. Doubova, E. Fernández-Cara, *Some control results for simplified one-dimensional models of fluid-solid interaction*. Math. Models Methods Appl. Sci, 15 (2005), No 5, 783–824.
- [8] A. Doubova, A. Osses, *Rotated weights in global Carleman estimates applied to an inverse problem for the wave equation*. Inverse Problems (2006) 265–296.
- [9] T. Takahashi, O. Yu Imanuvilov, *Exact controllability of a fluid body system*. Preprint IECN, U. Nancy, France, November 2005.

# Transformando el modelo posinomial para construir métodos de punto interior globalmente convergentes

N. BOAL, F.-J. SAYAS

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Zaragoza

nboal@unizar.es, jsayas@unizar.es

## Resumen

El trabajo que presentamos trata del modelo posinomial de Programación Geométrica. Éste es un modelo de optimización no lineal ampliamente estudiado entre los años 60 y 70 y que en la actualidad sigue siendo de interés debido a la cantidad de problemas reales que modelan [4, 5, 7, 8].

Este problema de optimización es no lineal y en general no convexo. Ahora bien, realizando una transformación convexa del mismo se consigue que un problema transformado con unas propiedades muy particulares [2] que permiten el diseño de algoritmos de punto interior globalmente convergentes basados en modificaciones del clásico método de Newton [1, 3]. Por otra parte, el análisis de estas especiales características del problema hacen posible plantear estrategias computacionales que permiten una implementación eficiente de este tipo de métodos.

Sección en el CEDYA 2007: CO

## Referencias

- [1] N. Boal, *Algoritmos de reducción de potencial para el modelo posinomial de Programación geométrica*, Monografías del Seminario Matemático García Galdeano, Prensas Universitarias de Zaragoza, 2003.
- [2] N. Boal, F.-J. Sayas, *Some properties of the posinomial model*. Submitted. Preprint Sem. G. Galdeano 27 (2005).
- [3] N. Boal, *A globally convergent interior point algorithm for the posynomial model* Submitted (2006).
- [4] H. Cheng, S.-C. Fang, J. E. Lavery, *Univariate cubic L1 splines a geometric programming approach*, Math. Methods Oper. Res. 56, 2 (2002), 197-229.
- [5] H. Cheng, S.-C. Fang, J. E. Lavery, *An efficient algorithm for generating univariate cubic L1 splines*, Computational Optimization and Applications 29, 2 (2004), 219-253.
- [6] A. S. El-Bakry, R. A. Tapia, T. Tsuchiya, Y. Zhang, *On the formulation and theory of the Newton interior point method for Nonlinear Programming*, Journal of Optimization Theory and Applications 89, 3 (1996), 507-541.
- [7] J. Kim, Error reduction techniques in geometric programming based mixed-mode circuit design optimization, [www.icsl.ucla.edu/~ckgroup/thesis/Jintae\\_MSThesis.pdf](http://www.icsl.ucla.edu/~ckgroup/thesis/Jintae_MSThesis.pdf) (2004).
- [8] L. Lasdon, *Nonlinear and geometric programming. Current status*, Annals of Operations Research 105 (2001), 99-197.



## Problemas de Control en Procesos de Eutrofización.

FRANCISCO JAVIER FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ.

Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Santiago de Compostela.

franfdz@usc.es

LINO J. ÁLVAREZ VÁZQUEZ.

Dpto. de Matemática Aplicada II. E.T.S.I. Telecomunicación. Universidad de Vigo.

lino@dma.uvigo.es

RAFAEL MUÑOZ SOLA.

Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Santiago de Compostela.

rafams@usc.es

### Resumen

El término Eutrofización designa el enriquecimiento en nutrientes de un ecosistema. El uso más extendido se refiere específicamente al aporte más o menos masivo de nutrientes inorgánicos en un ecosistema acuático. El desarrollo de la biomasa en un ecosistema viene limitado, normalmente, por la escasez de algunos elementos químicos, como el nitrógeno en los ambientes continentales y el fósforo en los marinos, que los productores primarios necesitan para desarrollarse y a los que llamamos por ello factores limitantes. La contaminación puntual de las aguas, por efluentes urbanos, o por la contaminación agraria, puede aportar cantidades importantes de esos elementos. El resultado es un aumento de la producción primaria (fotosíntesis) con importantes consecuencias sobre la composición, estructura y dinámica del ecosistema.

En este trabajo partimos de un modelo matemático en ecuaciones en derivadas parciales que modeliza el comportamiento de los fenómenos de eutrofización en un medio marino (ver [2]). Hacemos un estudio matemático del mismo considerándolo en un marco más general correspondiente a un sistema de ecuaciones cuasilineales y analizamos la existencia de soluciones débiles y muy débiles en el sentido de [1]. Por último, proponemos un problema de control sobre el sistema y damos una aproximación numérica de la solución del mismo.

**Sección en el CEDYA 2007:** CO.

### Referencias

- [1] Roubicek T. *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*, Birkhauser, 2005.
- [2] Drago M., Cescon B., Iovenitti L. *A three-dimensional numerical model for eutrophication and pollutant transport*, Ecological Modelling, 145, 17-34 (2001).

# Sobre el control puntual de la ecuación de ondas

CARLOS CASTRO

Dpto. de Matemática e Informática, ETSI Caminos, Canales y Puertos, Univ. Politécnica de Madrid

carlos.castro@upm.es

## Resumen

Se considera el problema de control exacto para la ecuación de ondas unidimensional cuando el control actúa sobre un punto  $\gamma(t)$  que describe una trayectoria regular sobre el dominio, a lo largo del tiempo  $t > 0$ . El objetivo de esta comunicación es dar condiciones suficientes sobre la curva  $\gamma(t)$  para obtener la controlabilidad del sistema.

Sean  $L, T > 0$  y  $\gamma : (0, T) \rightarrow (0, L)$  una curva parametrizada con valores en el intervalo  $(0, L)$ . Consideramos el siguiente problema de control: dados  $(u^0, u^1) \in L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)$  encontrar una función  $f : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(t)\delta_{\gamma(t)}(x) & \text{in } 0 < x < L, \quad 0 < t < T \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{in } 0 < t < T \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x) & \text{in } 0 < x < L. \end{cases} \quad (1)$$

verifique

$$u(x, T) = u_t(x, T) = 0. \quad (2)$$

En (1)  $\delta_{\gamma(t)}$  representa la masa de Dirac concentrada en el punto  $x(t)$  y  $f$  es el control.

En el caso particular en el que el control actúa en un único punto, es decir  $\gamma(t) = x_0 \in (0, L)$  para todo  $t \in (0, T)$ , se sabe que la respuesta a este problema depende sensiblemente de la posición de  $x_0$ . Más concretamente, el sistema es controlable, para un tiempo  $T$  suficientemente grande, si el punto  $x_0$  es irracional con respecto a la longitud del intervalo (ver por ejemplo [1]).

Para evitar esta condición tan sensible a la posición del control consideramos trayectorias móviles que tienen la ventaja de atravesar una infinidad de puntos irracionales con la longitud del intervalo  $L$ , es decir, para los que el sistema es controlable.

En esta comunicación presentamos el siguiente resultado:

**Teorema** Sean  $T > 2L$ ,  $c > 0$  y supongamos que  $\gamma \in C^1(0, T)$  es tal que  $c < |\gamma'(t)| \leq 1$  para todo  $t \in (0, T)$ . Entonces, el sistema (1) es controlable. Más concretamente, para cada dato inicial  $(u^0, v^0) \in L^2 \times H^{-1}(0, L)$  existe un control  $f \in H^{-1}(0, T)$  tal que la solución  $u$  de (1) satisface (2).

**Sección en el CEDYA 2007:** CO

## Referencias

- [1] S.A. Avdonin y S.A. Ivanov, *Families of Exponentials. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems*, Cambridge University Press, 1995.

# Un problema de control en los coeficientes para la ecuación de ondas con un actuador

F. MAESTRE, P. PEDREGAL

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Castilla-La Mancha

Faustino.Maestre@uclm.es, Pablo.Pedregal@uclm.es

A.MÜNCH

Laboratoire de Mathématique de Besançon , Univ. de Franche-Comte

arnaud.munch@univ-fcomte.fr

<http://matematicas.uclm.es/omeva>

## Resumen

Para proponer una comunicación al CEDYA 2007:

Analizaremos un problema de diseño óptimo bidimensional gobernado por una ecuación de ondas con un actuador. El problema consiste en encontrar de forma simultanea la distribución espacio-temporal de dos materiales isotrópicos (asociado al diseño  $\chi_{\omega_1}(t, x)$ ) junto a la posición estática del actuador (asociado al diseño  $\chi_{\omega_2}(x)$ ). El problema consiste en minimizar

$$(P) \quad \min_{\mathcal{X}_{\omega_1}, \mathcal{X}_{\omega_2}} I(\mathcal{X}_{\omega_1}, \mathcal{X}_{\omega_2}) = \int_0^T \int_{\Omega} (u_t^2 + a(t, x, \mathcal{X}_{\omega_1}) |\nabla u|^2) dx dt \quad (1)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \operatorname{div}([\alpha \mathcal{X}_{\omega_1} + \beta(1 - \mathcal{X}_{\omega_1})] \nabla u) + d(x) \mathcal{X}_{\omega_2} u_t &= 0 && \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ u &= 0 && \text{on } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x) && \text{in } \Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\omega_1} &\in L^\infty(\Omega \times (0, T); \{0, 1\}), \quad \mathcal{X}_{\omega_2} \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\}), \\ \int_{\Omega} \mathcal{X}_{\omega_1}(t, x) dx &\leq L_\alpha |\Omega|, \quad \forall t \in (0, T), \quad L_\alpha \in (0, 1), \\ \int_{\Omega} \mathcal{X}_{\omega_2}(x) dx &\leq L_d |\Omega|, \quad L_d \in (0, 1). \end{aligned} \quad (3)$$

La falta de soluciones clásicas de estos problemas es conocida ([5]), por tanto nuestro trabajo consistirá en analizar una apropiada relajación del problema (P), la cual la llevaremos a cabo mediante el uso de medidas de Young, las cuales nos proporcionan las microestructuras óptimas (laminados) para ambos diseños.

**Sección en el CEDYA 2007:** Control y Optimización

## Referencias

- [1] Allaire, G., *Shape optimization by the homogenization method*, Springer, (2002).
- [2] Lurie, K., *Some new advances in the theory of dynamic materials*, Journal of Elasticity, **72**, (2003) 229-239.
- [3] Maestre, F., Münch, A. and Pedregal, P., *Optimal design under the one-dimensional wave equation*. Submitted.
- [4] Münch, A., Pedregal P. and Periago, F., *Optimal design of the damping set for the stabilization of the wave equation*, Journal of Differential Equations, **231(1)**, (2006) 331-358. Serie **4** 112, (1977) 49-68.
- [5] Murat, F. *Contre-exemples pour divers problèmes où le contrôle intervient dans les coefficients*, Ann. Mat. Pura e Appl.

# Un protocolo de votación electrónica basado en firmas digitales ciegas

A. MARTÍN DEL REY

Dpto. de Matemática Aplicada, E.P.S. de Ávila, Universidad de Salamanca  
delrey@usal.es

A.B. CABELLO PARDOS, A. H. ENCINAS, S. HOYA WHITE

Dpto. de Matemática Aplicada, E.T.S.I.I. de Béjar, Universidad de Salamanca  
{anabelncp, ascen, sarahw}@usal.es

G. RODRÍGUEZ SÁNCHEZ

Dpto. de Matemática Aplicada, E.P.S. de Zamora, Universidad de Salamanca  
gerardo@usal.es

## Resumen

La gran expansión del uso de Internet, tanto en su implantación como en los servicios ofrecidos a través de la misma, permite al usuario realizar multitud de tareas de todo tipo: comercio electrónico, teletrabajo, consulta de bases de datos, etc. Es más, los diferentes gobiernos y administraciones públicas se han implicado en este desarrollo y han puesto a disposición de los ciudadanos nuevos servicios que se han dado en llamar *e-government* (o gobierno electrónico). Con esta sugerente denominación se hace referencia a servicios más o menos sofisticados ofrecidos por la Administración Pública tendentes a facilitar las gestiones ciudadano-Administración. Así entre los mismos podemos encontrar desde los sistemas más sencillos que proporcionan exclusivamente acceso a la información (información sobre becas, oposiciones, etc.), hasta los sistemas más sofisticados de ventanilla electrónica que permiten sustituir los trámites presenciales por trámites realizados por vía telemática: presentación de la declaración de la renta, pago de tasas, matriculaciones, etc. De esta forma, nuestra sociedad tiende a implantar en el ámbito electrónico todas aquellas actuaciones que los ciudadanos desarrollan habitualmente y entre ellas cabe destacar la participación ciudadana en la toma de decisiones (e-democracia o democracia digital) a través de lo que se ha dado en llamar el voto electrónico.

Hasta la fecha se han propuesto multitud de protocolos criptográficos que permiten el desarrollo de votaciones electrónicas (véanse, por ejemplo, [1, 3, 4]). La gran mayoría están basados en el uso de técnicas criptográficas de clave pública: criptosistema RSA o ElGamal, Firma digital, Firma Digital Ciega, etc.

En el presente trabajo se propone un nuevo protocolo de votación electrónica basado en los protocolos desarrollados recientemente por Liaw (véase [5]) y Chang y Lee ([2]) que hacen uso de la firma digital ciega. El protocolo propuesto está especialmente diseñado para entornos reducidos (votaciones sobre una red local de acceso restringido, por ejemplo). Además satisface los principales requisitos de seguridad exigibles a protocolos de este tipo: unicidad, robustez, anonimato, eficiencia, verificabilidad, completitud, imposibilidad de coerción, etc.

**Sección en el CEDYA 2007: OTROS TEMAS**

## Referencias

- [1] F. Baiardi, A. Falleni, R. Granchi, F. Martinelli, M. Petrocchi, A. Vaccarelli. *SEAS, a secure e-voting protocol: Design and implementation*. Comput. Secur., vol. 24 (8), (2005), 642-652.
- [2] Ch.-Ch. Chang, J.-S. Lee. *An anonymous voting mechanism based on the key exchange protocol*. Comput. Secur., vol. 25 (4), (2006), 307-314.
- [3] Y.-Y. Chen, J.-K. Jan, Ch.-L. Chen. *The design of a secure anonymous Internet voting system*. Comput. Secur., vol. 23 (4), (2004), 330-337.
- [4] A. Hevia, M. Kiwi. *Electronic jury voting protocols*. Theor. Comput. Sci., vol. 321 (1), (2004), 73-94.
- [5] H.-T. Liaw. *A secure electronic voting protocol for general elections*. Comput. Secur., vol. 23, (2004), 107-119.

# Convolutional decoding through a tracking problem

JOSÉ IGNACIO IGLESIAS CURTO<sup>1,2</sup>, UWE HELMKE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Mathematisches Institut, Universität Würzburg

<sup>2</sup> Dpto. de Matemáticas, Universidad de Salamanca

joseig@usal.es, helmke@mathematik.uni-wuerzburg.de

## Resumen

Convolutional codes can be regarded as discrete time linear systems. This relationship has been studied along decades, and concepts from both theories have found their counterparts into the other one.

In this context, decoding of a received word can be interpreted as a tracking problem. This should allow to give practical decoding algorithms for convolutional codes.

However, coding theory is usually studied over finite fields while optimal control problems have been considered over the real or complex fields. The solutions to these problems are not applicable as they make use of an Euclidean metric in which finite fields lack.

We state a tracking problem over finite fields using the Hamming metric instead of a bilinear quadratic form, and we propose a solution via block decoding. In particular, we focus on the tracking problem associated to a convolutional decoding problem, which leads to a method for decoding general convolutional codes. Under some conditions, a bigger number of errors than half the minimum distance can be corrected.

**Sección en el CEDYA 2007:** CO

## Referencias

- [1] J. L. Massey and M. K. Sain, "Codes, automata, and continuous systems: Explicit interconnections", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-12, no. 6, pp. 644-650, 1967.
- [2] J. L. Massey and M. K. Sain, "Inverse of linear sequential circuits", *IEEE Trans. Comp.*, vol. C-17, no. 4, pp. 330-337, 1968.
- [3] J. Rosenthal, J. M. Schumacher and E. V. York, "On behaviors and convolutional codes", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, no. 6, pp. 1881-1891, 1996.
- [4] J. Rosenthal, *Some interesting problems in systems theory which are of fundamental importance in coding theory*, Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, 1997.

# Las matrices de Toeplitz en la construcción de códigos convolucionales perforados

VICTORIA HERRANZ, CARMEN PEREA

Dpto. de Estadística, Matemáticas e Informática

mavi.herranz@umh.es, perea@umh.es

## Resumen

En este trabajo modelizamos, desde el punto de vista de sistemas lineales, el código obtenido por descomposición en bloques empleado en la técnica de construcción de códigos convolucionales perforados introducida por McEliece [1]. Los códigos convolucionales pueden considerarse como sistemas lineales discretos e invariantes en el tiempo. Rosenthal y York [2] introducen la descripción de un código convolucional en teoría de sistemas mediante la llamada representación entrada-estado-salida. Empleando dicha representación, así como las propiedades de las matrices de Toeplitz, establecemos las salidas del sistema que se pueden eliminar para que el código perforado resultante tenga la mayor distancia posible.

**Sección en el CEDYA 2007:** OTROS TEMAS (Análisis Matricial y Aplicaciones)

## Referencias

- [1] R.J. McEliece. *The algebraic theory of convolutional codes*, en V. Pless y W. Huffman (editores), *Handbook of Coding Theory* (1983), 1065-1138.
- [2] J. Rosenthal y E.V. York. *BCH convolutional codes*. IEEE. Trans. Inform. Theory., sér. VI, XLV (1999), 1833-1844.

# Absorbing boundary conditions in discrete time domain and convolution quadrature BEM–FEM for transient waves

A. LALIENA

Dpto. de Matemática Aplicada, Esc. Univ. Politécnica La Almunia (Zaragoza)

antonio.laliena@eupla.unizar.es

F.–J. SAYAS

Dpto. de Matemática Aplicada, C.P.S., Univ. de Zaragoza

jsayas@unizar.es

## Resumen

The convolution quadrature method was developed in the mid eighties by Christian Lubich as a devise for constructing new methods for convolution equations and also to analyze already existing methods for some partial differential equations. Among its many applications, the approximation of retarded integral equations offer attractive features, and the method is able to deal very easy and effectively with the scattering of waves around obstacles.

For the scattering of waves with penetrable obstacles (possibly with non-homogeneous properties), the convolution quadrature method allows to construct a family of discretizations by using a traditional variational formulation in the bounded non-homogeneous domain and retarded integral equations to express the exact absorbing boundary conditions in time. We show that the use of CQ methods based upon multistep or Runge–Kutta methods for the coupled interior–exterior problem leads to a time–stepping method for the interior domain with a discrete version of the retarded equation as a discrete convolutional system.

We will also give conditions guaranteeing stability of the method depending on the way the boundary integral system is written and discretized in space.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] Ch. Lubich, *Convolution quadrature and discretized operational calculus. I*, Numer. Math. 52 (1988) 129-145.
- [2] Ch. Lubich, *Convolution quadrature revisited*, BIT 44, 503-514 (2004).
- [3] Ch. Lubich, *On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equations*. Numer. Math. 67, 365-389 (1994).
- [4] M. Shanz, *Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. A boundary element approach*. Springer Lecture Notes in Appl. Mechanics 2, Berlin: Springer (2001).

# Métodos linealmente implícitos de tipo Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios aplicados a problemas parabólicos semilineales: reducción de orden y técnicas para evitarla

BLANCA BUJANDA, JUAN CARLOS JORGE

Dpto. de Ingeniería Matemática e Informática, Univ. Pública de Navarra

blanca.bujanda@unavarra.es, jcjorge@unavarra.es

## Resumen

En esta comunicación nos ocuparemos de la resolución numérica eficiente de problemas parabólicos semilineales de la forma:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } y(t) : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{H} \text{ solución de} \\ y'(t) = L y(t) + f(t) + g(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \\ \partial y(t) = b(t) \in \mathcal{H}^b \quad \forall t \in [t_0, T], \end{cases} \quad (1)$$

siendo  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}^b$  dos espacios de Hilbert de funciones definidas sobre un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  de frontera  $\Gamma$ ,  $\partial$  un operador frontera definido entre  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}^b$ ,  $L$  un operador elíptico lineal de segundo orden,  $f(t)$  el término fuente,  $g(t, y)$  una función regular que marca el aporte no lineal y  $b(t)$  una condición de contorno dependiente del tiempo.

En [2] presentamos un tipo de métodos que integra de manera muy eficiente esta clase de problemas. La base de los métodos presentados es la misma que la de los métodos de Pasos Fraccionarios cuando son aplicados a problemas parabólicos lineales. Así los métodos se construyen combinando discretizaciones espaciales adecuadas con discretizaciones temporales de tipo RK Aditivo en las que la aportación de la parte lineal de la función derivada,  $L y(t) + f(t)$ , se define mediante un método Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios (ver [6]) y la parte no lineal,  $g(t, y)$ , mediante un método RK explícito adecuado. Los algoritmos que se obtienen siguiendo este proceso presentan la característica de ser convergentes imponiendo solamente propiedades de tipo estabilidad absoluta lineal (ver [3]); además, si la descomposición del operador elíptico y del término fuente se realiza de manera adecuada, el costo computacional es bajo, comparado con los algoritmos obtenidos con métodos implícitos clásicos, ya que en este caso, en la resolución de las etapas intermedias sólo aparecen sistemas lineales con matrices muy sencillas.

En este tipo de problemas es bien conocido (ver [4],[5]) que aparece con frecuencia el inconveniente de la reducción de orden, sobre todo cuando las condiciones de contorno dependen del tiempo.

Mostraremos una técnica para evitar esta reducción de orden similar a la propuesta en [1]. Este proceso tiene la ventaja de que el costo computacional adicional que supone es muy poco, puesto que sólo afecta a la evaluación de ciertos datos en la frontera del dominio  $\Omega$ .

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] I. Alonso-Mallo & B. Cano *Efficient time integration of nonlinear partial differential equations by means of Rosenbrock methods*, Applied Mathematics Reports, Universidad de Valladolid (2006).
- [2] B. Bujanda & J.C. Jorge, *Efficient linearly implicit methods for nonlinear multidimensional parabolic problems*, J. Comput. Appl. Math. **164/165** (2004), 159–174.
- [3] B. Bujanda & J.C. Jorge, *Stability results for linearly implicit Fractional Step discretizations of non-linear time dependent parabolic problems*, Appl. Numer. Math. **56** (2006), no. 8, 1061–1076.
- [4] B. Bujanda & J.C. Jorge, *Order conditions for linearly implicit Fractional Step Runge-Kutta methods*, IMAJ-NA (en prensa).
- [5] Sanz-Serna, J. M.; Verwer, J. G. & Hundsdorfer, W. H., *Convergence and order reduction of Runge-Kutta schemes applied to evolutionary problems in partial differential equations*, Numer. Math. **50** (1987), no. 4, 405–418.
- [6] Yanenko, N.N., “The method of fractional steps”, Springer, 1971.



# Resolución numérica de un modelo de frontera libre para el crecimiento tumoral

CARMEN CALZADA

Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Univ. de Córdoba  
carmen.calzada@uco.es

GEMA CAMACHO

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla  
gemacv@us.es

ENRIQUE FERNÁNDEZ-CARA

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla  
cara@us.es

MERCEDES MARÍN

Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Univ. de Córdoba  
merche@uco.es

## Resumen

En este trabajo presentamos un esquema de resolución numérica de un modelo de frontera libre que simula el crecimiento de un tumor (ver [1]). Se supone que en el instante  $t$  el tumor ocupa una región  $\omega(t)$  de frontera  $\gamma(t)$ . Denotamos por  $\sigma = \sigma(x, t)$  la concentración de nutrientes y por  $p = p(x, t)$  la presión a la que están sometidas las células del tumor. Las ecuaciones del modelo son las siguientes:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \alpha \sigma - \Delta \sigma = 0 \text{ en } \omega(t) \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$-\Delta p = \mu(\sigma - \tilde{\sigma}) \text{ en } \omega(t) \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

$$\sigma = \sigma_\gamma \text{ sobre } \gamma(t), \quad (3)$$

$$p = a\kappa \text{ sobre } \gamma(t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -V_n \text{ sobre } \gamma(t), \quad (5)$$

$$\sigma|_{t=0} = \sigma_0 \text{ en } \omega(0) \text{ dado.} \quad (6)$$

Aquí,  $V_n(x, t)$  representa la componente normal de la velocidad con la que se mueven las células del tumor y  $\kappa$  es la curvatura de la frontera  $\gamma(t)$ . Se supone que  $\mu$ ,  $\alpha$  y  $a$  son constantes positivas y que  $\sigma_0$ ,  $\tilde{\sigma}$  y  $\sigma_\gamma$  son funciones dadas.

Se trata de determinar la frontera libre  $\gamma(t)$  y las funciones  $\sigma$  y  $p$ .

Para la resolución se ha utilizado un esquema de discretización en tiempo que permite desacoplar las diferentes incógnitas. Partiendo del dominio inicial  $\omega(0)$ , se calcula la concentración de nutrientes  $\sigma$  en el instante posterior resolviendo la ecuación (1) junto con las condiciones frontera (3) y la condición inicial (6). Con este dato, se calcula la presión  $p$  a partir de la ecuación (2) y la condición frontera (4). Ambos problemas se resuelven utilizando un método de dominios ficticios distribuidos en volumen (ver [2]) con el fin de no tener que cambiar el mallado del dominio en cada etapa temporal. Para la discretización espacial se utilizan elementos finitos P2-Lagrange. Para calcular el nuevo dominio  $\omega$ , en la siguiente etapa en tiempo, se utiliza un método de conjuntos de nivel ([3]). Para ello se tiene en cuenta que, utilizando (5), se conoce, a partir de la presión  $p$ , la componente normal de la velocidad de crecimiento de la frontera. Una vez actualizado el dominio se repite el proceso en la siguiente etapa temporal.

Se presentaran algunas experiencias numéricas obtenidas.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN (Análisis Numérico y Simulación Numérica)

## Referencias

- [1] Bazaliy, B.V. , Friedman, A. , A Free Boundary Problem for a Elliptic-Parabolic System: Application to a Model of Tumor Growth. *Comm. Partial Differential Equations*, 28 , no. 3-4, p.517–560, (2003).
- [2] Glowinski, R, *Numerical methods for fluids (Part 3)*, Handbook of Numerical Analysis, Vol. IX Ed. North-Holland, Amsterdam (2003).
- [3] Sethian, J.A. *Level set methods and fast marching methods. Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, (1999).

## A multiscale method applied to shallow water flow

ANNA MARTÍNEZ GAVARA, ROSA DONAT

Dpt. de Matemàtica Aplicada, Univ. de València

Ana.Martinez-Gavara@uv.es, Rosa.M.Donat@uv.es

GUILLAUME CHIAVASSA

ECM (Ecole Centrale de Marseille) Technopole de Chateau-Gombert

guillaume.chiavassa@egim-mrs.fr

### Resumen

A flux-limited second order scheme with the C-property is used to solve the one dimensional or two dimensional Saint-Venant system for shallow water flows with non-flat bottom and friction terms, as is introduced in [3].

High resolution at low cost can be obtained by applying point value multiresolution transform [1, 2, 4] in order to detect regions with singularities. The above method is applied in these regions while a cheap polynomial interpolation is used in the smooth ones, thus lowering the computational cost.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

### Referencias

- [1] B. Bihari, A. Harten. *Multiresolution shemes for the numerical solutions of 2D conservation laws*. SIAM J. Sci. Comput., 18 (1997), 315-354.
- [2] G. Chiavassa, R. Donat *Point value multiscale algorithms for 2D compressible flows*, SIAM J. Sci. Compt., Vol. 23, No. 3, pp. 805-823.
- [3] G. Haro, *Numerical simulation of shallow water equations amd some physical models in image processing*. Ph.D.Thesis, Departament of Technologies, Universitat Pompeu Fabra, Barcelona, 2005.
- [4] A. Harten. *Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws*. Comm. Pure Appl. Math., 48 (1995), 1305-1342.

# Métodos conservativos de direcciones alternadas para problemas parabólicos semilineales sobre mallados rectangulares lógicos

A. ARRARÁS, L. PORTERO, J.C. JORGE

Dpto. de Ingeniería Matemática e Informática, Universidad Pública de Navarra

andres.arraras@unavarra.es, laura.portero@unavarra.es, jcjorge@unavarra.es

## Resumen

El presente trabajo propone y analiza un método numérico eficiente para la resolución de problemas evolutivos de naturaleza semilineal en cuya formulación aparecen derivadas mixtas. En general, suponemos que dichos problemas se hallan definidos sobre geometrías bidimensionales no rectangulares que admiten una transformación suficientemente regular a un dominio rectangular.

En primer lugar, se aplica una semidiscretización espacial basada en una variante del método de elementos finitos mixtos (véase [1]). Si se consideran los espacios de Raviart-Thomas-Nédélec de orden más bajo en combinación con determinadas reglas de cuadratura, dicha semidiscretización se reduce a un esquema de diferencias finitas centrado en celdas, que tiene asociado un *stencil* de nueve puntos. El esquema resultante preserva las propiedades esenciales de los métodos mixtos estándar (precisión asintótica y conservatividad local), reduciendo notablemente su coste computacional.

La aproximación en espacio da lugar a un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales stiff, cuya integración temporal se realiza mediante un método de direcciones alternadas linealmente implícito. Para ello, la matriz de rigidez del sistema es descompuesta en tres términos: dos de ellos agrupan las derivadas de segundo orden discretas con respecto a cada una de las variables espaciales y actúan de modo implícito (al igual que en los esquemas clásicos de direcciones alternadas), mientras que el tercero, que es tratado explícitamente, contiene las discretizaciones de las derivadas mixtas y del término fuente no lineal (véase [4, 2]). El esquema totalmente discreto así obtenido está compuesto por conjuntos de sistemas tridiagonales desacoplados que son fácilmente paralelizables.

El trabajo se completa con algunos resultados teóricos de convergencia incondicional, tanto para el esquema continuo en tiempo (que generalizan los obtenidos en [3] sobre problemas parabólicos lineales) como para el esquema totalmente discreto. Por último, se incluye un experimento numérico que ilustra el comportamiento del método en la resolución de modelos de flujo en medios porosos de naturaleza anisótropa.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] T. Arbogast, M.F. Wheeler, I. Yotov. *Mixed finite elements for elliptic problems with tensor coefficients as cell-centered finite differences*. SIAM J. Numer. Anal., 34 (1997), 828 – 852.
- [2] B. Bujanda, J.C. Jorge. *Stability results for linearly implicit fractional step discretizations of non-linear time dependent parabolic problems*. Appl. Numer. Math., 56 (2006), 1061 – 1076.
- [3] R.E. Ewing, R.D. Lazarov. *Superconvergence of the mixed finite element approximations of parabolic problems using rectangular finite elements*. East-West J. Numer. Math., 1 (1993), 199 – 212.
- [4] K.J. in't Hout, B.D. Welfert. *Stability of ADI schemes applied to convection-diffusion equations with mixed derivative terms*. Appl. Numer. Math., 57 (2007), 19 – 35.

## Métodos multimalla en problemas lineales de flujo óptico

G. ASENSIO, P. GONZÁLEZ, C. PLATERO, J.M. PONCELA, J. SANGUINO, M.C. TOBAR

Applied BioEngineering Group (ABE-UPM)

Dpto. de Matemática Aplicada EUITI

Dpto. de Electrónica, Automática e Informática Industrial

Universidad Politécnica de Madrid

<http://www.elai.upm.es/spain/Investiga/Bioingenieria/bioing.htm>

### Resumen

Los métodos variacionales son especialmente útiles para resolver la ecuación del flujo óptico constante OFC

$$u(x) \cdot \nabla f(t, x) + \partial_t f(t, x) = 0,$$

porque preservan las discontinuidades y funcionan incluso cuando hay variaciones de iluminación [1]. Sin embargo las distintas regularizaciones implican funcionales cuya minimización tiene un alto costo computacional. En esta comunicación se formula el problema lineal, se discretiza y se resuelve usando distintos métodos multimalla [2]. Se comparan los resultados con los métodos iterativos clásicos [3] y con los métodos directos con almacenamiento sparse [4].

**Sección en el CEDYA 2007:** Solución numérica de Ecuaciones en Derivadas Parciales

### Referencias

- [1] G. Aubert, P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing, Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, sec. 5.3, Springer 2006.
- [2] A. Bruhm, J. Weikert, T. Kohlbeger, C. Schörr, *A Multigrid Platform for Real-Time Motion Computation with Discontinuity-Preserving Variational Methods*, preprint 136, Universität Saarlandes, Fachrichtung 6.1-Mathematik, Saarbrücken 2005.
- [3] D. Robinson, P. Milanfar, *Fast Local and Global Projection-Based Methods for Affine Motion Estimation*, Kluwer Academic Publishers, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 18:35-54, 2003.
- [4] I.S. Duff, A.M. Erisman, J.K. Reid, *Direct Methods for Sparse Matrices*, Monographs on Numerical Analysis, Oxford Science Publications 1989.

# Existencia de solución para un modelo termoeléctrico con conductividad térmica una función de Caratheodory

FRANCISCO PENA, ALFREDO BERMÚDEZ, RAFAEL MUÑOZ-SOLA  
Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Santiago de Compostela  
fpena@usc.es, mabermud@usc.es, rafams@usc.es

## Resumen

En esta charla presentamos un resultado de existencia de solución para un sistema no lineal de ecuaciones en derivadas parciales parabólicas. El modelo deriva de las ecuaciones de Maxwell en conductores para corrientes de baja frecuencia para el campo magnético, acopladas con un problema de Stefan para la temperatura. En concreto, consideramos el siguiente sistema en un dominio  $\Omega$  acotado de  $\mathbb{R}^3$  y para  $T > 0$ :

$$\partial_t(\mu(x)\mathbf{h}) + \nabla \times \left( \frac{1}{\sigma(x, \theta)} \nabla \times \mathbf{h} \right) = 0 \text{ en } \Omega \times ]0, T[, \quad (1)$$

$$\partial_t e - \nabla \cdot (k(x, \theta) \nabla \theta) = \frac{1}{\sigma(x, \theta)} |\nabla \times \mathbf{h}|^2 \text{ en } \Omega \times ]0, T[, \quad (2)$$

junto con

$$e(x, t) \in g(x, \theta(x, t)) \text{ c.p.d. en } \Omega \times ]0, T[.$$

Este sistema aparece en el modelado de dispositivos, a veces conocidos como “termistores”, donde la fuente de calor es electromagnética. El problema de Stefan se usa para considerar los posibles cambios de estado de los materiales. Este sistema ya fue considerado por los autores en [1]. Las principales limitaciones del citado trabajo consistían en que a) solo se permitían cambios de estado a una temperatura dada y b) la conductividad térmica  $k$  de los materiales solo dependía del punto  $x$ . Eso impedía considerar tanto materiales compuestos cuyos cambios de estado se producen en varios “saltos” como aquéllos cuya conductividad térmica depende de la temperatura.

El resultado de existencia dado en [1] se obtenía considerando el sistema con el segundo miembro de (2) truncado, para el cual se demostraba la existencia viéndolo como el acoplamiento de dos problemas evolutivos (electromagnético lineal y térmico no lineal) y usando el teorema de punto fijo de Schauder. Esto requería la unicidad de solución del problema térmico (véase [3]), lo que impedía tratar una conductividad térmica dependiente a la vez de la temperatura y el punto  $x$ .

Para obtener el nuevo resultado de existencia que evita las restricciones anteriores, fue necesario cambiar el enfoque de la demostración. Se parte de nuevo del sistema truncado y se considera una semidiscretización en tiempo totalmente implícita, que puede ser vista como el acoplamiento de un problema electromagnético lineal con un problema térmico, ambos estacionarios. El problema térmico puede reescribirse como una inecuación variacional de segunda especie, para la cual hay existencia y unicidad de solución. Aplicando el teorema de punto fijo de Schauder se demuestra la existencia de solución del problema truncado semidiscretizado en tiempo. Seguidamente se obtienen estimaciones a priori para la solución de éste (campo magnético, temperatura y entalpía) independientes del paso de tiempo  $\Delta t$  pero posiblemente dependientes del parámetro de truncamiento. Pasando al límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , se demuestra la existencia de solución del problema truncado. Se obtienen estimaciones de la solución del problema truncado independientes del parámetro de truncamiento mediante una técnica desarrollada en [1], que adapta el método de [2] al caso en que  $g(x, \cdot)$  es maximal monótono (constante por subdominios en la variable  $x$ ). Se obtiene la convergencia puntual de la temperatura suponiendo que el operador maximal monótono  $g(x, \cdot)$  admite un número finito de saltos, mejorando los resultados de [1], en donde se requería que el operador  $g(x, \cdot)$  tuviera a lo sumo un salto. Finalmente, se efectúa el paso al límite con respecto al parámetro de truncamiento como en [1], construyendo así una solución del sistema original.

**Sección en el CEDYA 2007:** Ecuaciones en Derivadas Parciales

## Referencias

- [1] Bermúdez, A. and Muñoz-Sola, R. and Pena, F., *A nonlinear partial differential system arising in thermoelectricity*. European J. Appl. Math., 16, 6, (2005), 683–712.
- [2] Boccardo, L. and Gallouët, T., *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*. Journal of Functional Analysis, 87, 1, (1989), 149–169.
- [3] DiBenedetto, E. and Showalter, R. E. *Implicit degenerate evolution equations and applications*. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 12, 5, (1982), 731–751.

# Finite difference approximation for secondary consolidation problems and its numerical resolution by multigrid

GASPAR F.J., GRACIA, J.L., LISBONA, F.J., OOSTERLEE, C.W.

Department of Applied Mathematics, University of Zaragoza.

fjgaspar@unizar.es, jlgracia@unizar.es, lisbona@unizar.es

## Resumen

Soil consolidation theory addresses the time dependent coupling between the deformation of a porous matrix and the fluid flow inside. The porous matrix is supposed to be saturated by an incompressible fluid phase and the flow governed by Darcy's law. The state of the continuous medium is characterized by the knowledge of the displacements and the fluid pressure at each point of the domain. The consolidation process under one dimensional conditions was first investigated by Terzaghi [4] and a phenomenological model for a rather general situation was proposed and analyzed by Biot [1] in three dimensions. These authors assumed an elastic response of the soil skeleton to the loads. Under the previous assumption a change in stress will generate a deformation and an excess of pore pressure. The dissipation of the pressure will result into a final deformed state. This is not the situation in some cases where the soil deformation continues even though all excess pore pressures have been dissipated. The presence of this process, the so called secondary consolidation, is typical in the consolidation of clay soils. A mathematical model has been formulated by Murad and Cushman in [2] and reported by Showalter in [3].

This Biot's type model is given by a system of partial differential equations for the unknown displacement and pressure. We denote by  $\mathbf{u}$  the displacement vector and by  $p$  the pore pressure of the fluid. The governing equations for a homogeneous, isotropic and incompressible medium  $\Omega$  read

$$\begin{aligned} -\lambda^* \nabla \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \tilde{\Delta} \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \alpha \nabla p &= \mathbf{0}, \\ \alpha \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \kappa \Delta p &= f(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (1)$$

where  $\lambda^*$  is a secondary consolidation parameter,  $\tilde{\Delta}$  is the vectorial Laplace operator,  $\lambda$  and  $\mu$  are the Lamé coefficients,  $\kappa$  is the hydraulic conductivity,  $\alpha$  is the Biot-Willis coefficient and  $f$  represents a forced extraction or injection process.

For the numerical approximation of these equations we use finite difference schemes on staggered grids such that the main properties of the differential operators are preserved in the discrete level. Also, a weighted two-level discretization on a staggered mesh has been adopted for time stepping which is coherent with the lack of initial condition for the pressure. A priori estimates in discrete energy norm are obtained and convergence results are given.

Finally, we also introduce an efficient multigrid method for this problem. In particular, we present a pointwise smoothing method based on distributive iteration. In distributive smoothing the original system of equations is transformed by pre-conditioning in order to achieve favourable properties, such as a decoupling of the equations and/or possibilities for pointwise smoothing. Numerical experiments confirm the theoretical results and efficiency of the proposed solver.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] M. Biot, *General theory of three dimensional consolidation*, J. Appl. Phys. **12** (1941) 155-169.
- [2] M.A. Murad, J.H. Cushman, *Multiscale flow and deformation in hydrophilic swelling porous media*, Int. J. Engrg. Sci. **3** (1996) 313-338.
- [3] R.E. Showalter, *Diffusion in deforming porous media*, Series A: Mathematical Analysis **10** (2003) 661-678.
- [4] K. Terzaghi, *Theoretical soil mechanics*. John Wiley, New York, 1943.

# A mixed finite element method for the coupling of fluid flow with porous media flow

S. MEDDAHI

Dpto. de Matemáticas, Univ. de Oviedo

salim@uniovi.es

G.N. GATICA, R. OYARZÚA

Dpto. de Ingeniería Matemática, Univ. de Concepción, Chile

ggatica@ing-mat.udec.cl, royarzua@ing-mat.udec.cl

## Resumen

We consider a porous media entirely enclosed within a fluid region, and present a well posed conforming mixed finite element method for the corresponding coupled problem. The interface conditions refer to mass conservation, balance of normal forces, and the Beavers-Joseph-Saffman law, which yields the introduction of the trace of the porous media pressure as a suitable Lagrange multiplier. The finite element subspaces defining the discrete formulation employ Bernardi-Raugel and Raviart-Thomas elements for the velocities, piecewise constants for the pressures, and continuous piecewise linear elements for the Lagrange multiplier. We show stability, convergence, and a priori error estimates for the associated Galerkin scheme.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] G. Beavers and D. Joseph, *Boundary conditions at a naturally impermeable wall*. Journal of Fluid Mechanics, 30, (1967), 197-207.
- [2] C. Bernardi, F. Hecht, and O. Pironneau, *Coupling Darcy and Stokes equations for porous media with cracks*. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 39, (2005), 7-35.
- [3] W. Jäger and M. Mikelić, *On the interface boundary condition of Beavers, Joseph, and Saffman*. SIAM Journal on Applied Mathematics, 60, (2000), 1111-1127.
- [4] W.J. Layton, F. Schieweck, and I. Yotov, *Coupling fluid flow with porous media flow*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 40, (2003), 2195-2218.
- [5] B. Riviere and I. Yotov, *Locally conservative coupling of Stokes and Darcy flows*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 42, (2005), 1959-1977.

# Condiciones de frontera absorbentes para la ecuación de Schrödinger no lineal discretizada con elementos finitos

NURIA REGUERA

Dpto. de Matemáticas y Computación, Univ. de Burgos

nreguera@ubu.es

ISAÍAS ALONSO MALLO

Dpto. de Matemática Aplicada y Computación, Univ. de Valladolid

isaias@mac.uva.es

## Resumen

Son numerosas las situaciones que nos llevan a resolver numéricamente un problema de evolución de ecuaciones en derivadas parciales definido en un dominio infinito. Para ello, es necesario restringir el problema a un subdominio acotado e imponer condiciones de frontera artificiales. Si la solución de este nuevo problema coincide con la restricción de la solución del problema original, las condiciones de frontera se llaman transparentes (CFT). Sin embargo, aunque estas condiciones de frontera evitan la existencia de reflejos cuando la solución llega a la frontera, suelen ser no locales y en la práctica, muchas veces se prefiere utilizar condiciones de frontera locales absorbentes (CFA), permitiendo pequeños reflejos. En la literatura existente en este campo, cabe destacar el trabajo pionero de Engquist y Majda [5] para la ecuación de ondas. También se han obtenido CFA para otras muchas ecuaciones, como la ecuación lineal de Schrödinger (véase, por ejemplo, [1, 2, 3, 6] para diferencias finitas y [4] para elementos finitos).

En este trabajo integramos la ecuación no lineal de Schrödinger utilizando elementos finitos lineales para la discretización espacial y acoplamos de manera adaptativa las CFA obtenidas en [4] para la ecuación lineal. Además, la implementación de las CFA es también adaptativa (de forma similar a como se propuso en [3] para el caso lineal). De esta manera, las CFA van cambiando en cada paso en tiempo teniendo en cuenta la solución numérica que llega en ese instante de tiempo a la frontera.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] I. Alonso-Mallo; N. Reguera, *Weak ill-posedness of spatial discretizations of absorbing boundary conditions for Schrödinger-type equations*, SIAM J. Numer. Anal. **40** (1) (2002), 134–158.
- [2] I. Alonso-Mallo; N. Reguera, *Discrete absorbing boundary conditions for Schrödinger-type equations. Construction and error analysis*, SIAM J. Numer. Anal. 41, No.5 (2003), 1824–1850.
- [3] I. Alonso-Mallo; N. Reguera, *Discrete absorbing boundary conditions for Schrödinger-type equations. Practical implementation*, Math. Comput. 73, No.245 (2004), 127–142.
- [4] I. Alonso-Mallo; N. Reguera, *A high order finite element discretization with local absorbing boundary conditions of the linear Schrödinger equation*, J. Comput. Physics 220 (1) (2006) 409–421.
- [5] B. Engquist; A. Majda, *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Math. Comput. 31 (1977), 629–651.
- [6] T. Fevens; H. Jiang, *Absorbing boundary conditions for the Schrödinger equation*, SIAM J. Sci. Comput. 21 (1999), 255–282.



# Un modelo unidimensional de flujo sanguíneo obtenido mediante el método de desarrollos asintóticos

JOSÉ MANUEL RODRÍGUEZ SEIJO, MARÍA VICTORIA OTERO PIÑEIRO  
 Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación, Universidade da Coruña  
 mnrseijo@udc.es

## Resumen

En este trabajo presentamos un nuevo modelo unidimensional del flujo de un fluido a través de un tubo curvilíneo de paredes elásticas. Este modelo es aplicable, en particular, al flujo de la sangre en un vaso sanguíneo.

Para deducir este modelo utilizamos el método de desarrollos asintóticos, considerando como pequeño parámetro adimensional ( $\varepsilon$ ) la relación entre el diámetro medio de la sección transversal y la longitud del tubo. En primer lugar realizamos un cambio de variable a un dominio de referencia independiente de  $\varepsilon$ , y a continuación suponemos que la solución se puede escribir como una serie de potencias de  $\varepsilon$ . El paso siguiente es identificar los primeros términos de la serie de potencias y, tras deshacer el cambio de variable, obtenemos una aproximación de la solución en el dominio original.

El modelo así obtenido (sin necesidad de realizar hipótesis a priori sobre la forma de la solución) acopla el movimiento de la pared del tubo con las ecuaciones de movimiento del fluido, y es similar (aunque con alguna diferencia interesante) al modelo propuesto en [1]. A continuación describimos brevemente el modelo que obtenemos.

Si la línea media del tubo curvilíneo viene dada por la aplicación  $\mathbf{c} : s \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  (donde suponemos que  $s$  es el parámetro natural), y parametrizamos las paredes del tubo mediante la carta

$$\phi(t, s, \theta) = \mathbf{c}(s) + r(t, s, \theta)[(\cos \theta)\mathbf{v}_2(s) + (\sin \theta)\mathbf{v}_3(s)], \quad (s, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$$

(donde  $t$  es el tiempo y  $\{\mathbf{v}_1(s) = \mathbf{c}'(s), \mathbf{v}_2(s), \mathbf{v}_3(s)\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  para cada  $s$ ), entonces el modelo propuesto es:

$$\begin{aligned} r(t, s, \theta) &= r(0, s, \theta) + \zeta(s) \\ M_0(s) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + I_0(s) \zeta &= L_0(s)(p_i - p_e) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{2\nu_f}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left( A \frac{\partial u}{\partial s} \right) &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_i}{\partial s} - \frac{L}{\rho_f A} f_R - g v_{13} \\ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (uA)}{\partial s} &= 0 \end{aligned}$$

donde  $A(t, s) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta$  es el área de la sección transversal,  $L(t, s) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\frac{\partial r}{\partial \theta})^2 + r^2} d\theta$  es su perímetro,  $L_0(s) = L(0, s)$ ,  $M_0(s) = \int_0^{2\pi} e \rho_s \sqrt{(\frac{\partial r}{\partial \theta})^2 + r^2} d\theta$ ,  $I_0(s) = \int_0^{2\pi} \frac{eE}{1-\nu_s^2} \frac{[2(\frac{\partial r}{\partial \theta})^2 + r \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} + r^2]^2}{[(\frac{\partial r}{\partial \theta})^2 + r^2]^{5/2}} d\theta$  ( $M_0$  e  $I_0$  se evalúan en  $t = 0$ ),  $E$  es el módulo de Young y  $\nu_s$  el coeficiente de Poisson de la pared del tubo,  $\nu_f$  es la viscosidad cinemática del fluido,  $\rho_s$  y  $\rho_f$  son las densidades de la pared del tubo y del fluido,  $e$  es el espesor de la pared del tubo,  $u$  es la velocidad media del fluido en la dirección tangente a  $\mathbf{c}$ ,  $\zeta$  es el desplazamiento de la pared del tubo en la dirección radial,  $p_i$  y  $p_e$  son las presiones interior y exterior al tubo,  $f_R$  es una fuerza de rozamiento (típicamente, de la forma  $f_R = \rho_F \gamma u |u|$ ),  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $v_{13} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{e}_3$ .

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia mediante el proyecto MTM2006-14491.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] A. Quarteroni, L. Formaggia, *Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System in Handbook of Numerical Analysis, Volume XII: Computational Models for the Human Body*, Ed. N. Ayache, Elsevier, 2004.

# Métodos de elementos finitos y características de alto orden para la convección natural

M. BENÍTEZ, A. BERMÚDEZ DE CASTRO

Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Santiago de Compostela  
martabg@usc.es

## Resumen

Esta comunicación se centrará en el estudio de problemas de convección natural.

En primer lugar se recordarán los modelos matemáticos implicados en los fenómenos de transporte de un fluido; como caso particular se obtienen los modelos matemáticos implicados en los procesos de convección natural (ver [2]). Los modelos se plantean sobre un dominio bidimensional. Típicamente, los fenómenos de transporte en un fluido están gobernados por las ecuaciones básicas de conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía. En primer lugar se han estudiado por separado las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, a pesar de que en realidad se trata de un problema acoplado, ya que en el modelo están presentes las variaciones de densidad, viscosidad y conductividad térmica provocadas por modificaciones de temperatura. Posteriormente hemos estudiado el problema acoplado y finalmente se ha desarrollado el modelo de Boussinesq, que hemos supuesto válido para representar los procesos de convección natural estudiados.

Aspectos como la no linealidad de las ecuaciones constitutivas y la restricción de incompresibilidad, hacen del estudio del transporte de un fluido un problema de gran complejidad. Desde el punto de vista práctico, esta complejidad se traduce en que los requerimientos computacionales, tanto de memoria como de tiempo de cálculo, sean enormes.

El modelo matemático que planteamos para la conservación de la energía es una formulación del tipo *entalpía* con un término convectivo que incluye el campo de velocidades (que se supone conocido cuando se estudia dicha ecuación de forma independiente) (ver [5]).

La segunda parte de la comunicación tiene como finalidad presentar el método que hemos utilizado para resolver numéricamente el problema. Dado su carácter evolutivo y la importancia de la convección en el mismo, hemos empleado un método de características de orden dos en combinación con métodos de elementos finitos, para resolver numéricamente el problema acoplado de las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía (ver, por ejemplo, [3], [4], [6]). Debido al carácter no lineal del problema térmico, para su resolución numérica se ha utilizado un algoritmo iterativo de dualidad. Los algoritmos obtenidos se han implementado mediante programas de ordenador escritos en Fortran.

Mostraremos los resultados numéricos que hemos obtenido comparándolos con datos analíticos. Se ha resuelto un problema bidimensional de convección natural en una cavidad cuadrada donde las paredes verticales se encuentran a distintas temperaturas. Los resultados obtenidos han sido comparados con los resultados de Vahl Davis [7].

Esta comunicación recoge parte de los resultados contenidos en [1].

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] M. Benítez García. Simulación numérica en Ingeniería y Ciencias Aplicadas I y II. Trabajo de Investigación Tutelado. Universidad de Santiago de Compostela, 2006.
- [2] A. Bermúdez. Continuum Thermomechanics. Birkhäuser Verlag, Berlin. *Progress in Mathematical Physics*, 43, 2005.
- [3] A. Bermúdez, M. R. Nogueiras, and C. Vázquez. Numerical solution of (degenerated) convection-diffusion-reaction problems with higher order characteristics/finite elements. Part I: Time discretization. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44:1829–1853, 2006.
- [4] A. Bermúdez, M. R. Nogueiras, and C. Vázquez. Numerical solution of (degenerated) convection-diffusion-reaction problems with higher order characteristics/finite elements. Part II: Fully Discretized Scheme and Quadrature Formulas. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44:1854–1876, 2006.
- [5] A. Bermúdez and M.V. Otero. Numerical solution of a three-dimensional solidification problem in aluminium casting. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:1885–1906, 2004.
- [6] K. Boukir, Y. Maday, B. Métivet, and E. Razafindrakoto. A high-order characteristics/finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 25:1421–1454, 1997.
- [7] G. de Vahl Davis. Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 3:249–64, 1983.

# Regularidad anisótropa de un problema de Ecuaciones Primitivas.

D. BRESCH

Laboratoire de Modélisation et Calcul, Université Joseph-Fourier, Grenoble (France)

didier.bresch@imag.fr

F. GUILLÉN-GONZÁLEZ, M. A. RODRÍGUEZ-BELLIDO

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla (España)

guillen@us.es, angeles@us.es

## Resumen

Las Ecuaciones Primitivas (EP) son un sistema en velocidad-presión que modelan gran cantidad de flujos geofísicos 3D, en particular el movimiento del agua en el océano inducido por la velocidad del viento en superficie y las fuerzas centrípetas y de Coriolis. Se obtienen a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes (NS) con viscosidad anisótropa (turbulenta), suponiendo dos simplificaciones importantes: la presión hidrostática y la hipótesis de techo rígido (superficie del agua fija) [4, 3]. Un problema modelo que retenga las principales dificultades analíticas se reduce a encontrar una velocidad horizontal  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) : (t; \mathbf{x}, z) \in (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  y una presión superficial  $p : (t; \mathbf{x}) \in (0, T) \times S \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $T > 0$  es un instante de tiempo,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  es un dominio oceánico y  $S \subset \mathbb{R}^2$  es el dominio de la superficie, tales que:

$$(EP) \begin{cases} \partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + v_3 \partial_z \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} p = \mathbf{f} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}) = 0 & \text{en } (0, T) \times S, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

siendo  $v_3(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}, s) ds$  la velocidad vertical.

La condición de contorno en superficie es  $\partial_z \mathbf{v}|_{\text{superficie}} = \boldsymbol{\tau}$ , donde  $\boldsymbol{\tau}$  es la tracción del viento, y en el fondo se consideran condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneo (no deslizamiento) o de tipo Neumann (dependientes de la fricción con el fondo). La regularidad de este sistema presenta dificultades debido a la singularidad de la convección vertical  $v_3 \partial_z \mathbf{v}$ . Son varios los autores que han estudiado la regularidad débil ( $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ ) de (EP) (p. e. [3]), la regularidad fuerte para el sistema lineal estacionario ([5]), o la regularidad fuerte ( $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ ) del sistema no lineal (p. e. [2]). En [2] se usan "estimaciones anisótropas", aprovechando la particular estructura de las (EP), donde  $\partial_z v_3$  es regular pero no  $\nabla_{\mathbf{x}} v_3$ .

En este trabajo estudiamos la regularidad de (EP) con la condición de contorno sobre  $\partial_z \mathbf{v}$  en el fondo. Dicha condición no es estándar cuando el fondo no es plano, ya que entonces  $\partial_z \mathbf{v}$  no coincide con la derivada normal asociada al operador de segundo orden de las (EP) que es de tipo Laplaciano. Sin embargo, estas condiciones de contorno sobre  $\partial_z \mathbf{v}$  son usadas por varios autores para la implementación de esquemas numéricos (p. e. [1]).

En primer lugar demostramos que, para determinadas configuraciones del dominio, hay existencia de solución débil global en tiempo. En segundo lugar, reformulando el problema con las nuevas incógnitas  $\partial_z \mathbf{v}$  y  $\bar{\mathbf{v}}$  (siendo  $\bar{\mathbf{v}}$  la media vertical de  $\mathbf{v}$ ), demostramos simultáneamente que  $\partial_z \mathbf{v}$  y  $\bar{\mathbf{v}}$  poseen regularidad  $\mathbf{H}^2$  para datos pequeños. Finalmente, analizamos la regularidad de orden superior para ambas velocidades,  $(\partial_z \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}) \in \mathbf{H}^3(\Omega)$ , lo que a nuestro conocimiento son los primeros resultados de regularidad superior a  $\mathbf{H}^2$  para (EP).

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] V Casulli & E. Cattani, *Stability, Accuracy and Efficiency of a Semi-Implicit Method for Three-Dimensional Shallow Water Flow*. Computers Math. Applic., 27-4 (1994), 99-112.
- [2] F. Guillén-González, N. Masmoudi & M. A. Rodríguez-Bellido, *Anisotropic estimates and strong solutions of the Primitive Equations*. Differential Integral Equations, 14-11 (2001), 1381-1408.
- [3] J. L. Lions, R. Temam & S. Wang, *On the equations of the large scale Ocean*. Nonlinearity, 5 (1992), 1007-1053.
- [4] J. Pedlosky, *Geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag, 1987.
- [5] M. Ziane, *Regularity Results for Stokes Type Systems*, Applicable Analysis, 58 (1995), 263-292.

# Modelado multiescala de flujos viscoelásticos: una nueva aproximación a CONNFFESSIT

JUAN LUIS PRIETO ORTIZ, RODOLFO BERMEJO BERMEJO

Dpto. de Matemática Aplicada, E.T.S.I.Industriales, Univ. Politécnica de Madrid

juanluis.prieto@upm.es, rbermejo@etsii.upm.es

MANUEL LASO CARBAJO

Dpto. de Ingeniería Química, E.T.S.I.Industriales, Univ. Politécnica de Madrid

laso@diquima.upm.es

## Resumen

Se considera una novedosa aproximación al método multi-escala de CONNFFESSIT [1] para la simulación de fluidos poliméricos viscoelásticos, dentro de la teoría cinética del modelo FENE. En la parte macroscópica se emplea un método semi-Lagrangiano [2] para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes con elementos P2/P1; la parte microscópica se trata mediante la traducción de las ecuaciones de Fokker-Planck en el espacio de configuración a ecuaciones diferenciales estocásticas, integrando los grados internos de libertad de las partículas ('dumbbells') por un método semi-implícito bien establecido [3]. La interfaz micro-macro viene representada por el tensor de esfuerzos del polímero, que es calculado a través de un algoritmo que combina ideas de Elementos Finitos y Elementos Naturales. Se presenta asimismo un algoritmo desarrollado al efecto para la búsqueda y localización de partículas en mallas no estructuradas sobre dominios múltiplemente conexos. La eficacia del método se ilustrará sobre un problema de referencia (contracción plana 10:1).

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] M. Laso, H.C. Öttinger, *Calculation of viscoelastic flow using molecular models: the CONNFFESSIT approach*. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 47 (1993) 1-20
- [2] A. Allievi, R. Bermejo, *Finite element modified method of characteristics for the Navier-Stokes equations*. Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2000; 32; 439-464
- [3] H.C.Öttinger, *Stochastic Processes in Polymeric Fluids*. Springer-Verlag(1996) ISBN 354058353X

# Análisis de un método BEM-FEM para la resolución numérica de un problema de magnetostática en $\mathbb{R}^3$

ALFREDO BERMÚDEZ<sup>1</sup>, RODOLFO RODRÍGUEZ<sup>2</sup>, PILAR SALGADO<sup>1</sup>, VIRGINIA SELGAS<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Dpto. de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela, España

<sup>2</sup>Dpto. de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Chile

<sup>3</sup>Dpto. de Matemáticas, Universidade da Coruña, España

mabermud@usc.es, rodolfo@ing-mat.udec.cl, mpilar@usc.es, vselgas@udc.es

## Resumen

El problema de magnetostática se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell despreciando la dependencia temporal de los campos electromagnéticos. Concretamente, suponiendo conocida la densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , el problema consiste en encontrar el campo magnético  $\mathbf{H}$  y la inducción magnética  $\mathbf{B}$ , definidos en todo  $\mathbb{R}^3$  y cumpliendo:

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (3)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética. Para resolver este modelo simplificado, en ingeniería eléctrica pueden encontrarse distintos métodos numéricos, cuya diferencia fundamental son las incógnitas principales del problema. Así, pueden encontrarse formulaciones en términos de campos vectoriales (vector potencial magnético, campo magnético, inducción magnética) o en términos de diferentes potenciales escalares (ver por ejemplo [2]). Los resultados numéricos de la literatura indican que las formulaciones escalares son las más eficientes tanto desde un punto de vista computacional como de aproximación. En particular, la combinación de los denominados *potencial escalar reducido* y *potencial total* parece ser la más eficiente. Esta estrategia, que combina el potencial total en los materiales magnéticos sin fuentes de corriente y el potencial reducido en el aire y en los materiales magnéticos que transportan corriente, fue introducida en 1979 por Simkin y Trowbridge [4] para dominios bidimensionales y extendida posteriormente a dominios tridimensionales. Sin embargo, el análisis matemático de esta formulación y de su resolución numérica con un método de elementos finitos no se ha realizado hasta fechas muy recientes en [1].

Es importante señalar que el análisis desarrollado en [1] es para dominios tridimensionales *acotados* y por tanto requiere añadir a las ecuaciones (1–3) condiciones de contorno aproximadas, dado que el dominio natural del problema es todo el espacio. Ahora bien, el hecho de que las ecuaciones son homogéneas con coeficientes constantes en el exterior de una región acotada, permite combinar un método de elementos finitos con un método de elementos de contorno y aproximar la formulación escalar *potencial total-potencial reducido* en todo el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Así, el objetivo de este trabajo es analizar la formulación en términos de los potenciales total y reducido definida en  $\mathbb{R}^3$  y su resolución numérica mediante un método BEM-FEM. Cabe señalar que analizaremos el problema considerando que el dominio magnético puede ser múltiplemente conexo, lo cual conduce a trabajar con un potencial total multivaluado. Seguiremos las ideas de [1] para el tratamiento del potencial multivaluado, evitando de este modo las costosas aproximaciones numéricas de las funciones de base del espacio de campos armónicos de Neumann construidas en [3] para un problema cuasi-estacionario. Probaremos resultados de convergencia para el método BEM-FEM propuesto y mostraremos algunos resultados numéricos correspondientes a la simulación de un electroimán.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] A. Bermúdez, R. Rodríguez, P. Salgado, *A finite element method for the magnetostatic problem in terms of scalar potentials*, Preprint DIM 2006-28, Universidad de Concepción, Concepción, 2006.
- [2] Ch. Magele, H. Stögner K. Preis, *Comparison of different finite element formulations for 3D magnetostatic problems*, IEEE Transaction on Magnetics, 24 (1) (1988), 31–34.
- [3] S. Meddahi, V. Selgas, *A Mixed-FEM and BEM coupling for a three-dimensional eddy current problem*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., 37 (2) (2003), 291–318.
- [4] J. Simkin, C.W. Trowbridge, *On the use of the total scalar potential in the numerical solution of field problems in electromagnetics*, Int. J. Meth. Eng. 14 (1979), 423–440.

# NURBS-Enhanced FEM para problemas de scattering

R. SEVILLA, S. FERNÁNDEZ-MÉNDEZ AND A. HUERTA

Laboratori de Càlcul Numèric (LaCàN), Universitat Politècnica de Catalunya

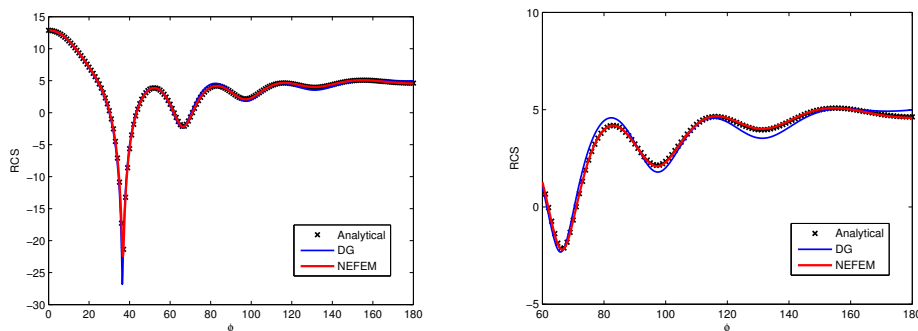
{ruben.sevilla, sonia.fernandez, antonio.huerta}@upc.edu

## Resumen

En los últimos años son muchos los autores que destacan la necesidad de disponer de un buen modelo geométrico para la simulación numérica de problemas de contorno. En el contexto de métodos de Galerkin discontinuo (DG), la importancia del modelo geométrico en la resolución de las ecuaciones de Euler fue claramente demostrada en [1]. Utilizando interpolaciones lineales la pérdida de precisión cerca de contornos curvos es demasiado importante y acaba afectando al comportamiento global de la solución. Por otra parte, en [2] se propone el denominado análisis isogeométrico. El objetivo fundamental de esta filosofía es trabajar con el modelo geométrico exacto, independientemente de la discretización espacial utilizada. La estrategia adoptada consiste en utilizar las funciones base de las Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) para describir la geometría del dominio y para aproximar la solución.

La metodología presentada en [3] comparte el objetivo fundamental del análisis isogeométrico pero es más natural ya que la descripción mediante NURBS sólo se utiliza para el contorno del dominio, lo que usualmente se obtiene con los programas comerciales de CAD. De esta manera, el NURBS-Enhanced Finite Element Method (NEFEM) considera la descripción geométrica exacta pero la solución se interpola de la manera habitual en elementos finitos, mediante funciones polinómicas en cada elemento. En la mayor parte del dominio (elementos con lados rectos) se utilizan elementos finitos clásicos mientras que en los elementos con una arista definida mediante NURBS es necesario definir la interpolación y diseñar una cuadratura numérica adecuada.

En este trabajo se plantea la aplicación del NEFEM, con una formulación DG a las ecuaciones de Maxwell. En la resolución de problemas de scattering de ondas electromagnéticas el NEFEM demuestra importantes ventajas respecto al método DG estándar. Para una malla fijada el NEFEM es entre 11 y 15 veces más preciso. Además, para una precisión fijada el NEFEM requiere sólo el 38 % de grados de libertad y el 75 % del tiempo de CPU consumido por el método de DG estándar. En la figura se muestra la *Radar Cross Section* (RCS) utilizando DG y NEFEM con una interpolación de grado 9 y un zoom en el rango [60, 180] donde se observa la mayor precisión de la estrategia propuesta.



Sección en el CEDYA 2007: AN

## Referencias

- [1] F. Bassi and S. Rebay, *High-order accurate Discontinuous Finite Element solution of the 2D Euler equations*, J. Comput. Phys., v. 138, p. 251-285, 1997.
- [2] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell and Y. Bazilevs *Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., v. 194, p. 4135-4195, 2005.
- [3] R. Sevilla, A. Huerta y S. Fernández-Méndez, *NURBS-Enhanced Finite Element Method (NEFEM)* Libro de Resúmenes (CEDYA 2005). Universidad Carlos III de Madrid, 2005.

# COMUNICACIONES

*Viernes 28*





# Sobre la existencia de atractores para ecuaciones aleatorias de reacción-difusión con retardos

MARÍA JOSÉ GARRIDO ATIENZA, T. CARABALLO

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla

mgarrido@us.es, caraball@us.es

B. SCHMALFUSS

Institut für Mathematik  
Fakultät EIM, Universität Paderborn

schmalfuss@uni-paderborn.de

J. VALERO

Dpto. Estadística y Matemática Aplicada  
Universidad Miguel Hernández de Elche

jvalero@umh.es

## Resumen

La intención de esta comunicación es analizar el comportamiento asintótico de las soluciones de determinadas ecuaciones semilineales no autónomas (aleatorias) con retardos, es decir, ecuaciones en las que aparecen términos de memoria que además eventualmente podrán ser infinitos. Como caso particular consideraremos una ecuación aleatoria de reacción-difusión con retardos para la que no se supone unicidad de solución.

Comenzaremos presentando una teoría abstracta con la que se pretenderá analizar el comportamiento asintótico de sistemas dinámicos multivaluados. En concreto, una vez definidos los conceptos de sistema dinámico multivaluado no autónomo (MNDS) y de sistema dinámico multivaluado aleatorio (MRDS) -el cual no es más que un MNDS verificando una adecuada propiedad de medibilidad-, analizaremos la existencia y unicidad de atractor pullback y aleatorio asociados, respectivamente, a los MNDS y MRDS, ya que es bien conocido que los conceptos de atractor pullback y aleatorio son apropiados para describir el comportamiento en el infinito de dichos sistemas.

Posteriormente consideraremos una ecuación en derivadas parciales semilineal no autónoma con memoria, para la que en primer lugar probaremos la existencia de soluciones globales las cuales generarán un MNDS. Demostraremos que dicho sistema dinámico multivaluado no autónomo tiene asociado un atractor pullback. Además, cuando el espacio de fases que consideremos tenga una estructura de espacio de probabilidad, mostraremos que dicho MNDS es de hecho un MRDS que posee un único atractor aleatorio.

**Sección en el CEDYA 2007:** Sección del Congreso en la que se engloba la comunicación: EDP.

## Referencias

- [1] T. Caraballo, M.J. Garrido-Atienza, B. Schmalfuß, and J. Valero. *Non-autonomous and random attractors for delay random semilinear equations without uniqueness*, en preparación.

# On a free boundary morpho-dynamic problem in landscape evolution

E. SCHIAVI, A. I. MUÑOZ

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Rey Juan Carlos de Madrid

emanuele.schiavi@urjc.es, anaisabel.munoz@urjc.es

J. I. DÍAZ, A. C. FOWLER

Dpto. de Matemática Aplicada, UCM and O.C.I.A.M. Math. Institute, Univ. of Oxford

diaz.racefyn@insde.es, fowler@maths.ox.ac.uk

## Resumen

This contribution is devoted to the derivation and mathematical analysis of a morpho-dynamic problem of landscape evolution which has been recently addressed in geo-mathematics (see [1]). An overland flow over an erodible substrate is considered and the key process affecting hillslope morphology (soil erosion by water which causes detachment, transport and deposition of sediments) is modeled. This approach leads to a singular free boundary problem for a second order quasilinear parabolic equation derived from fundamental conservation laws. We start with the *strong formulation* suggested in ([1]) of the Cauchy problem for an initial thickness perturbation  $h_0(x)$ , say a bounded and non negative function  $h_0(x)$  with a compact and connected support  $(\xi_-(0), \xi_+(0))$  and such that  $h_0^m(x)$  has a prescribed total mass  $M$ . We shall be especially interested in the question of *global solvability* of the following problem.

Given  $m > 1$ ,  $T \in \mathbb{R}^+$  (eventually  $T = +\infty$ ) and  $M \in \mathbb{R}^+$ , find two continuous curves  $\xi_-, \xi_+ : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  and a function  $h : \mathcal{P}_T \rightarrow [0, +\infty)$  where  $\Omega_0 = (\xi_-(0), \xi_+(0))$ ,  $\Omega_t = (\xi_-(t), \xi_+(t)) \times \{t\}$ ,  $\mathcal{P}_T = \cup_{t>0} \Omega_t$ , such that

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_t = (h^m)_{xx} + h^m, & \text{in } \mathcal{D}'(\mathcal{P}_T), \\ h(x, 0) = h_0(x) & \text{a.e. } x \in \Omega_0, \\ h(x, t) > 0, & \text{a.e. } (x, t) \in \mathcal{P}_T, \\ h(x, t) \equiv 0, & \text{a.e. } (x, t) \notin \mathcal{P}_T, \\ h(\xi_-(t), t) = h(\xi_+(t), t) = 0, & \text{for any } t \in (0, +\infty), \\ \xi_-(0) = \xi_-^0, \xi_+(0) = \xi_+^0 \text{ and } \xi_-(t) < \xi_+(t) & \text{for any } t \geq 0, \\ \int_{\xi_-(t)}^{\xi_+(t)} h^m(x, t) dx = M & \text{for any } t \in (0, +\infty). \end{array} \right.$$

This is a free boundary problem for a nonlinear heat equation with source while the last equation is a conservation law written in term of an integral (non local) constraint which fix the free (moving) boundaries  $\xi_-(t)$  and  $\xi_+(t)$  separating the (connected) region where  $h(x, t) > 0$  from the region where  $h(x, t) = 0$ . Notice that the mass conservation constraint prevents the blow-up phenomenon. The solution to this problem should be understood in a suitable weak sense that we shall make precise when dealing with the weak global (or complementary) formulation associated to the above strong formulation. Our aim is to show that the strong formulation of [1] can be written in terms of a non homogeneous condition for the flux at the free boundaries. This allows to get an unconstrained global weak formulation for which we propose a convergent iterative algorithm leading to the existence of solutions. Some numerical simulation results will be also presented.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] Fowler, A.C., Natalia Kopteva and Charles Oakley 2005 *The formation of river channels*. SIAM J. Appl. Math., in press.

# Convergencia al equilibrio en un modelo simplificado de angiogenesis

CRISTIAN MORALES RODRIGO

Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
Faculty of Informatics, Mathematics and Mechanics,  
Warsaw University, ul. Banacha 2, 02-097 Warsaw, Poland  
cristianmatematicas@yahoo.com

## Resumen

En esta comunicación nos ocuparemos del siguiente modelo simplificado de angiogenesis.

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla w) & \text{en } \Omega \times (0, T) = Q_T, \\ w_t = -uw & \text{en } Q_T, \\ u_\nu - uw_\nu = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \\ w(x, 0) = w_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\Omega \subset R^N$  es un dominio acotado con frontera,  $\partial\Omega$  regular,  $\nu$  denota el vector normal exterior y  $u_0 \geq 0$ ,  $w_0 > a > 0$  son funciones suficientemente regulares. El modelo (??) es un caso particular de los considerados originariamente en [?]. Posteriormente, en [?] se prueba la existencia de solución global regular de (??) en el caso 1-dimensional. Más recientemente en [?] y [?] se aborda el caso  $\Omega = R^N$  ( $N \geq 2$ ) y se prueba la existencia de soluciones globales débiles  $L^p$  ( $p < \infty$ ) (dependientes del tiempo) bajo unas condiciones de pequeñez en el dato inicial  $u_0$  si  $N \geq 3$ .

Nosotros nos concentraremos en el caso  $N = 2$  y probaremos existencia de solución global débil  $L^\infty$  para datos iniciales grandes. Concretamente,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C(\|u_0\|_{L^\infty}).$$

Tambien probaremos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t) - \bar{u}\|_\infty = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|w(\cdot, t)\|_\infty = 0,$$

donde  $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0$  y  $|\Omega|$  es la medida de  $\Omega$ . Mas aun, bajo la condición adicional  $u_0 > \delta > 0$  entonces

$$\|u(\cdot, t) - \bar{u}\|_\infty \leq C_1 e^{-\alpha_1 t}, \quad \|w(\cdot, t)\|_\infty \leq C_2 e^{-\alpha_2 t}.$$

Las constantes  $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$  pueden calcularse de manera explícita.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] L. Corrias, B. Perthame and H. Zaag, *A chemotaxis model motivated by angiogenesis*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 141-146.
- [2] L. Corrias, B. Perthame and H. Zaag, *Global solutions of some chemotaxis and angiogenesis systems in high space dimensions*, Milan J. Math. 72 (2004) 1-28.
- [3] M.A. Fontelos, A. Friedman and B. Hu, *Mathematical analysis of a model for the initiation of angiogenesis*, SIAM J. Math. Anal. Appl. 33 (2002) 1330-1355.
- [4] A. Friedman and J.I. Tello, *Stability of solutions of chemotaxis equations in reinforced random walks*, J. Math. Anal. Appl. 272 (2002) 138-163.
- [5] E.F. Keller and G.M. Odell, *Necessary and sufficient conditions for chemotactic bands*, Math. Biosci. 27 (1975), 309-317.
- [6] M. Rascle, *Sur une équation integro-différentielle non linéaire issue de la biologie*, J. Differential Equations 32 (1979) 420-453.
- [7] M. Rascle, *On a system of non-linear strongly coupled partial differential equations arising in biology*, Conf. on Ordinary and Partial Differential Equation. Lectures Notes in Math. 846 Everitt and Sleeman eds. Springer-Verlag, New-York, 1980, 290-298.

# Estudio teórico de un modelo simplificado sobre angiogénesis

M. DELGADO , A. SUÁREZ

Dpt. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla

madelgado@us.es, suarez@us.es

## Resumen

La angiogénesis es un proceso fundamental involucrado en el crecimiento de tumores. En dicho proceso el tumor segrega unas sustancias químicas (englobadas en el término TAF) que atraen a las células endoteliales (CE) que están en una arteria cercana. Dichas células endoteliales van creando una red de capilares que si alcanzan al tumor proveen a éste de nuevos nutrientes para seguir creciendo, y en consecuencia con posibilidad de metástasis.

Hay diversos modelos matemáticos para modelizar dicho proceso, ver [2]. En esta comunicación iniciamos el estudio teórico de uno de ellos propuesto por Chaplain, ver [3]. Como característica fundamental de este modelo está la inclusión de un término que modela el crecimiento de las CE sólo a partir que el TAF alcance un valor. Este término es no derivable lo que incluye dificultades técnicas en el estudio teórico, ver [1].

Estudiamos en primer lugar el modelo estacionario, mostrando condiciones de existencia y unicidad de solución positiva. En segundo lugar, estudiamos el correspondiente problema parabólico mostrando la existencia y unicidad de solución positiva así como su comportamiento asintótico.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] M. Delgado y A. Suárez. *Positive solutions of a system arising from angiogenesis*. Sometido a publicación.
- [2] N. V. Mantzaris, S. Webb y H. G. Othmer. *Mathematical modeling of tumor-induced angiogenesis*. *J. Math. Biol.* **49** (2004), 111-187.
- [3] M. A. J. Chaplain. *Avascular growth, angiogenesis and vascular growth in solid tumours: the mathematical modelling of the stages of tumor development*. *Math. Comput. Modelling* **23** (1996), 47-87.

# Sobre un resultado de no existencia de soluciones positivas para un problema elíptico en el semi espacio

SEBASTIÁN LORCA

Instituto de Alta Investigación, Univ. de Tarapaúa, Arica - Chile

slorca@uta.cl

## Resumen

Consideremos el problema

$$-\Delta_m u \geq u^p \quad \text{en } \mathbb{R}^N,$$

donde  $1 < m < N$  y  $m - 1 < p < N(m - 1) / (N - m)$ . Mitidieri y Pohozaev probaron en [7] que no existe solución positiva para ese problema.

Por otro lado, de lo que el autor conoce, no hay un resultado similar para el caso en que la inecuación ocurre en el semi espacio  $\mathbb{R}_+^N = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$ .

Este tipo de resultados, conocidos como del tipo Liouville, son usados para probar estimaciones a priori de soluciones positivas de problemas en dominios acotados, por ejemplo del tipo:  $-\Delta_m u = f(x, u, \nabla u)$  en  $\Omega$ ;  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Esto es especialmente útil cuando este problema asociado es no variacional (ver por ejemplo [1], [2], [3], [4], [5], [8], [9] y [10]). La idea básica es el uso de la técnica de *blow-up* que esencialmente consiste en lo siguiente: suponga por contradicción que existe una sucesión  $(u_n)_n$ , no acotada en  $L^\infty$ , de soluciones positivas del problema en  $\Omega$  antes mencionado. Sea  $x_n$  un punto donde el máximo de  $u_n$  es alcanzado, un re-escalamiento centrado en  $x_n$  y algunas condiciones sobre el crecimiento de  $f$  permiten obtener una función límite que es positiva y verifica  $-\Delta_m u \geq u^p$  en  $\mathbb{R}^N$  o bien en  $\mathbb{R}_+^N$ .

Existen importantes trabajos en los últimos años, en particular destacamos [2] y [8], en los que se han puesto diferentes condiciones para asegurar que el problema límite esté definido en todo  $\mathbb{R}^N$ , obteniendo así una contradicción con el resultado de [7]. Una vez que se tiene una estimación a priori en la norma  $L^\infty$ , resultados sobre regularidad permiten obtener estimaciones para la derivada.

Por otro lado, aplicando *blow-up* también se obtiene una información que no es usada: la función límite verifica además  $-\Delta_m u \leq Cu^p$ . Presentamos aquí un resultado del tipo Liouville en el cual se usa esa información adicional (ver [6]).

**Teorema 1.** *Asuma  $1 < m < N$  y  $m - 1 < p < N(m - 1) / (N - m)$ . Entonces no existe solución positiva de clase  $C^1$  para*

$$u^p \leq -\Delta_m u \leq Cu^p \quad \text{in } \mathbb{R}_+^N.$$

Lo fundamental en la demostración es el uso de estimaciones locales y desigualdades del tipo Harnack (ver [10] y [11]). Usando este teorema, los resultados obtenidos en [2] y [8] se pueden demostrar fácilmente y generalizar. Mencionamos también que la técnica propuesta es de utilidad para resolver otro tipo de problemas (ver [5]).

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] M.-F. Bidaut-Veron & S.I. Pohozaev, *Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems*. J. Anal. Math., 84(2001), 1-49.
- [2] C. Azizieh & P. Clément, *A Priori estimates and continuation methods for positive solutions of p-Laplace equations*. J. Differential Equations, 179(2002), 412-428.
- [3] B. Gidas & J. Spruck, *Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations*. Comm. Pure and Appl. Math., 34, (1981), 525-598.
- [4] B. Gidas & J. Spruck, *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*. Comm. Partial Differential Equations, 6 (1981), 883-901.
- [5] L. Iturriaga & S. Lorca, *Existence and multiplicity results for degenerate elliptic equations with dependence on the gradient*. Boundary Values Problems, aceptada.
- [6] S. Lorca, *Nonexistence of Positive Solution for Quasilinear Elliptic Problems in the Half-Space*. Journal of Inequalities and Applications, Vol. 2007 (2007), Article ID 65126.
- [7] E. Mitidieri & S.I. Pohozaev, *Nonexistence of positive solutions for quasilinear elliptic problems in  $\mathbb{R}^N$* . Proc. Steklov Inst. Math., 227(1999), 1-32.

- [8] D. Ruiz, *A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems*. J. Differential Equations, 199(2004), 96-114.
- [9] J. Serrin, *Local behaviour of solutions of quasilinear equations*. Acta Math., 111(1964), 247-302.
- [10] J. Serrin & H. Zou, *Cauchy–Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities*. Acta Math., 189(2002), 79-142.
- [11] N. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their applications to quasilinear elliptic equations*. Comm. Pure Appl. Math., 20(1967), 721-747.

# Análisis mediante simetrías de una familia de ecuaciones de lubricación

M.L. Gandarias

marialuz.gandarias@uca.es

## Resumen

Consideramos la familia de ecuaciones de lubricación unidimensionales

$$u_t = (f(u)u_{xxx})_x - kg(u)u_x$$

donde  $u$  representa el grosor del fluido y  $f(u)$  y  $g(u)$  dependen de la geometría del problema. Estas ecuaciones han sido usadas para modelizar la dinámica de una película fina de líquido viscoso donde la película de líquido es uniforme en una dirección. Analizamos estas ecuaciones haciendo uso de la teoría de reducciones mediante simetrías de ecuaciones en derivadas parciales. Algunas soluciones de similitud son soluciones con interés físico.

## Referencias

- [1] Bertozzi A.L., *SIAM J. Appl. Math.*, **56**, (1996), 681-314.
- [2] Andrea L Bertozzi, M. Pugh, ‘Long-Wave Instabilities and Saturation in Thin Film Equations’, *Comm. Pur. Appl. Math.*, Vol. LI, pages 625-651, 1998.
- [3] Bluman G W and Kumei S 1989 *Symmetries and Differential Equations* (Berlin: Springer)
- [4] M.L. Gandarias, E. Medina *Europhysics Letters* **55** 143-149 (2001).
- [5] M.L. Gandarias, E. Medina *Proceedings NEEDS 1999*
- [6] M.L. Gandarias *Physics Letters A* 286 (2001) 153-160.
- [7] Greenspan H.P., *J. Fluid. Mech.*, **84** (1978), 125-143.
- [8] T. Hocherman, P. Rosenau, ‘On KS-type equations describing the evolution and rupture of a liquid interface’, *Physica D*, Vol. 67, pages 113-1254, 1993.
- [9] Smyth N.F., and Hill J.M., *IMA J.of Appl. Math.* **40**(1988) 73-86.

# Números de condición estructurados para autovalores múltiples

MARÍA JOSÉ PELÁEZ, JULIO MORO

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

mpelaezmath@gmail.com, jmoromath@math.uc3m.es

DANIEL KRESSNER

Department of Computer Science, UmeåUniversity

kressner@cs.umu.se

## Resumen

El número de condición  $\kappa(A, \lambda)$  de un autovalor  $\lambda$  de una matriz  $A$  mide la sensibilidad de  $\lambda$  frente a perturbaciones infinitesimales en  $A$ . Cuando la matriz  $A$  pertenece a una clase  $\mathcal{S}$  de matrices estructuradas (como pueden ser las matrices simétricas, las hamiltonianas, simplécticas, Toeplitz, Hankel, etc...) tiene sentido definir el *número de condición estructurado*  $\kappa(A, \lambda; \mathcal{S})$ , que estima la sensibilidad de  $\lambda$  cuando las perturbaciones a la matriz  $A$  se restringen al conjunto  $\mathcal{S}$ . En aquellos casos en que  $\kappa(A, \lambda; \mathcal{S})$  sea mucho menor que  $\kappa(A, \lambda)$  es de esperar que un algoritmo que preserve la estructura sea más preciso a la hora de calcular los autovalores que algoritmos convencionales como QR o divide y vencerás. De ahí la importancia de poder comparar ambos números de condición para el mayor número posible de estructuras.

Aunque se han identificado números de condición estructurados para autovalores *simples*, el caso de autovalores múltiples, posiblemente defectivos, está aún prácticamente por explorar. Este caso es especialmente relevante en problemas estructurados, en los que las simetrías y restricciones de todo tipo impuestas por la estructura llevan a los autovalores con frecuencia a la coalescencia en las situaciones de mayor interés. En esta charla, tras definir un número de condición tipo Hölder, tanto estructurado como no estructurado, basado en la teoría de perturbación de Lidskii, identificamos el número de condición estructurado de autovalores múltiples para diversas estructuras, entre las que se encuentran las matrices reales, las simétricas y antisimétricas complejas, las hamiltonianas y anti-hamiltonianas, Toeplitz y Hankel. También se extienden estos resultados al marco de pares de matrices, obteniendo números de condición estructurados para autovalores múltiples, finitos o infinitos, de *haces regulares de matrices*  $A - \lambda B$ .

**Sección en el CEDYA 2007:** AN



# Índice de alcanzabilidad de sistemas 2D positivos con 2 ciclos

E. BAILO, J. GELONCH

Dept. de Matemàtica, Universidad de Lleida  
ebailo@matematica.udl.es, jgelonch@matematica.udl.es

S. ROMERO

Inst. de Matemàtica Multidisciplinar, Univ. Polit. de València  
sromero@imm.upv.es

## Resumen

Sea

$$x_{i,j} = A_1 x_{i-1,j} + A_2 x_{i,j-1} + B_1 u_{i-1,j} + B_2 u_{i,j-1}$$

un sistema 2D positivo según el modelo de Fornasini-Marchesini. El cálculo de una cota para su índice de alcanzabilidad es un problema actualmente abierto. La forma algebraica (tradicional) de abordar el cálculo del índice de alcanzabilidad del sistema pasa por el estudio de la llamada matriz de alcanzabilidad. Esta matriz se construye mediante productos de Hurwitz de las matrices que definen el sistema, o técnicas similares que podemos calificar de igualmente engorrosas.

Las propiedades estructurales de estos sistemas permiten también una aproximación de carácter combinatorio al problema. Así se llega al concepto de digrafo coloreado asociado al sistema.

En este trabajo se presentan resultados en el caso en el cual el digrafo asociado está formado por dos ciclos con una sola fuente, generalizando los ya obtenidos en [1], [2] y [3].

**Sección en el CEDYA 2007:** OTROS (Análisis Matricial y Aplicaciones)

## Referencias

- [1] E. Bailo, R. Bru, J. Gelonch y S. Romero, *On the Reachability Index of Positive 2D Systems*, IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 53-10 (2006), 997–1001.
- [2] E. Bailo, R. Bru, J. Gelonch y S. Romero, *Sobre el índice de alcanzabilidad de sistemas 2D positivos*. In Cd-Rom Actas XIX CEDYA/IX CMA (2005), Leganés (España).
- [3] E. Bailo, J. Gelonch y S. Romero, *Additional results on the reachability index of positive 2-D systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 341 (2006), 73–80.
- [4] R. Bru, C. Coll, S. Romero y E. Sanchez, *Reachability indices of positive linear systems*. Electron. J. of Linear Algebra, 11 (2004), 88–102.
- [5] E. Fornasini; M. E. Valcher, *Controllability and Reachability of 2-D Positive Systems: a Graph Theoretic Approach*, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers. 52-3 (2005), 576–585.
- [6] T. Kaczorek, *Reachability index of the positive 2D general models*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences 52-1 (2004), 79–81.
- [7] T. Kaczorek. “Positive 1D and 2D Systems”, Springer-Verlag, London, 2002.

# On the intersection of the classes of doubly diagonally dominant matrices and $S$ -strictly diagonally dominant matrices

FRANCISCO PEDROCHE<sup>1</sup>, RAFAEL BRU<sup>1</sup>

Institut de Matemàtica Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València. Camí de Vera s/n.  
46022 València. Spain.

rbru@imm.upv.es, pedroche@imm.upv.es

LJILJANA CVETKOVIĆ<sup>2</sup>, VLADIMIR KOSTIĆ<sup>2</sup>

Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad. Serbia,  
21000 Novi Sad.

lilac@ns.sbb.co.yu, vkostic@im.ns.ac.yu

## Abstract

We denote by  $H_0$  the subclass of  $H$ -matrices consisting of all the matrices that lay simultaneously on the classes of doubly diagonally dominant (DDD) matrices ( $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n} : |a_{ii}| |a_{jj}| \geq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \sum_{k \neq j} |a_{jk}|, i \neq j$ ; see [3]) and  $S$ -strictly diagonally dominant ( $S$ -SDD) matrices; see [1], [2]. Notice that strictly doubly diagonally dominant matrices (also called Ostrowsky matrices) are a subclass of  $H_0$ . Strictly diagonally dominant matrices (SDD) are also a subclass of  $H_0$ . In this paper we analyze some properties of the class  $H_0 = \text{DDD} \cap S\text{-SDD}$ .

**Sección en el CEDYA 2007:** Otros (Análisis Matricial)

## References

- [1] L. Cvetkovic. H-matrix theory vs. eigenvalue localization *Numerical Algorithms*, 42: 229-245, 2006.
- [2] R. S. Varga. *Geršgorin and his circles*. Springer Series in Computational Mathematics, vol. 36. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [3] B. Li and M. J. Tsatsomeros. Doubly diagonally dominant matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 261:221–235, 1997.

---

<sup>1</sup>Supported by Spanish DGI grant MTM2004-02998.

<sup>2</sup>Supported by the Provincial Secretariat of Science and Technological Development of Vojvodina, Serbia, grant 01123.

# Cálculo de autovectores con alta precisión relativa con el algoritmo SSVD para matrices simétricas

JUAN MANUEL MOLERA MOLERA, FROILÁN M. DOPICO

Dpto. de Matemáticas, Univ. Carlos III de Madrid

molera@math.uc3m.es, dopico@math.uc3m.es

## Resumen

Los algoritmos convencionales para el problema simétrico de autovalores (QR, divide y conquista, o bisección con iteración inversa) sólo garantizan en general dígitos correctos para los autovalores más grandes en módulo, pero pueden proporcionar para los autovalores más pequeños aproximaciones sin ninguna cifra correcta, o incluso con el signo equivocado. El interés de los algoritmos de alta precisión relativa es que garantizan que todos los autovalores tienen algunas cifras correctas, independientemente de su magnitud. Sin embargo, hay que hacer notar que esto no es posible para todas las matrices.

Recientemente Dopico, Molera & Moro han presentado un algoritmo (SSVD) [1] que proporciona alta precisión relativa para la clase de matrices simétricas, definidas o indefinidas, más amplia conocida hasta la fecha.

El algoritmo se divide en dos partes: primero se calcula una SVD con alta precisión relativa, y después se obtienen los autovalores y los autovectores de, respectivamente, los valores singulares (asignándoles el signo correspondiente) y los vectores singulares. El uso de la SVD como primer paso es responsable, tanto del amplio rango de aplicabilidad del algoritmo, como del hecho de que es un algoritmo que sólo usa transformaciones ortogonales.

La versión original del algoritmo presentada en [1] proporciona autovalores con alta precisión relativa, y autovectores también con alta precisión, pero *relativa al gap relativo de vectores singulares*. Este hecho no deseable ha sido arreglado, y en esta charla se presentará una nueva versión del algoritmo SSVD en la que los autovectores se obtienen con alta precisión pero *relativa al gap relativo de autovectores*.

## Referencias

- [1] J. M. M. F. M. DOPICO AND J. MORO, *An orthogonal high relative accuracy algorithm for the symmetric eigenproblem*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 25 (2003), pp. 301–351.

# Realizaciones positivas de determinados sistemas singulares\*

RAFAEL CANTÓ, BEATRIZ RICARTE, ANA M. URBANO  
Instituto de Matemática Multidisciplinar, Univ. Politécnica de Valencia  
rcanto@mat.upv.es, bearibe@mat.upv.es, amurbano@mat.upv.es

## Resumen

Los *sistemas generalizados* lineales de control [7] se pueden representar mediante un modelo espacio-estado, que relaciona las tres variables del sistema: entradas, estados y salidas. Así, en tiempo discreto, un sistema invariante con  $n$  estados,  $s$  entradas y  $r$  salidas viene dado por:

$$\begin{cases} Ex(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

donde  $E$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son matrices reales de tamaños  $n \times n$ ,  $n \times n$ ,  $n \times s$ ,  $r \times n$  y  $r \times s$ , respectivamente. Si  $E = I$ , el sistema se llama *estándar*, si  $E$  es no invertible el sistema se llama *singular*.

Otra manera de representar estos sistemas es a partir de la relación existente entre las entradas y las salidas. El inconveniente de este modelo es que sólo describe la dinámica del sistema y no su estructura interna, que viene dada por un modelo espacio-estado. No obstante, es posible averiguar una representación espacio-estado de un sistema a partir de su modelo entrada-salida. A la determinación de una descripción interna del sistema a partir de un modelo entrada-salida se le denomina realización.

En el modelo entrada-salida, la relación existente entre las entradas y las salidas viene dada por una matriz racional, llamada matriz de transferencia, que relaciona la transformada  $Z$  de las entradas y las salidas del sistema. Dada una matriz de transferencia  $G(z) \in \mathbb{R}^{r \times s}(z)$ , se llama realización de  $G(z)$  al conjunto de matrices  $(E, A, B, C, D)$  que satisface

$$G(z) = C(pE - A)^{-1}B + D$$

Se llama dimensión de la realización al tamaño de la matriz  $A$ . La realización será minimal si es la de mínima dimensión.

Dada una matriz de transferencia  $G(z)$ , encontrar cualquier realización es trivial. El problema viene cuando imponemos ciertas restricciones como que la realización represente a un sistema positivo ya que, en este caso, la realización minimal puede ser de dimensión mayor que el orden de la matriz de transferencia [1].

Basándonos en resultados previos obtenidos para sistemas estándares [2]-[6] y [8], en este trabajo consideramos sistemas singulares y pretendemos obtener realizaciones positivas de ciertas matrices de transferencia con polos reales múltiples. Además, para determinados casos, establecemos condiciones para que la dimensión de la realización positiva  $(E, A, B, C, D)$  y el orden de la matriz de transferencia  $G(z)$  coincidan.

**Sección en el CEDYA 2007:** CO, Control y Optimización

## Referencias

- [1] L. Benvenuti and L. Farina. *A Tutorial on the Positive Realization Problem*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 49, no. 5, (2004), 651-664.
- [2] L. Benvenuti, L. Farina, B.D.O. Anderson and F. De Bruyne, "Minimal Positive Realizations of Transfer Functions with Positive Real Poles", *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 47, no. 9, pp. 1370-1377, Sep. 2000.
- [3] R. Canto, B. Ricarte and A. M. Urbano, "On Positive Realizations of Irreducible Transfer Matrices", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, vol. 341, pp. 41-48, 2006.
- [4] R. Cantó, B. Ricarte y V. Rumchev, "A Basic Canonical Form Of Discrete-Time Compartmental Systems", *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, vol. 2(6), pp. 261-273, 2007. "
- [5] C. Hadjicostis, "Bounds on the size of minimal nonnegative realizations for discrete-time LTI systems", *Systems and Control Letters* vol. 37, pp. 39-43, 1999.
- [6] A. Halmshlager and M. Matolcsi, "Minimal Positive Realizations for a Class of Transfer Functions", *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Expr. Briefs*, vol. 52, no. 4, pp. 177-180, Ap. 2005.
- [7] T. Kaczorek, *Positive 1D and 2D Systems*, Springer, London, 2002.
- [8] B. Nagy and M. Matolcsi, "Minimal Positive Realizations of Transfer Functions with Nonnegative Multiple Poles", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 9, pp. 1447-1450, Sep. 2005.

\*Trabajo financiado por el proyecto DGI AGL2004-03263/AGR.

# Submatriz sudeste más próxima que hace múltiple un valor propio prescrito

FRANCISCO E. VELASCO, JUAN-MIGUEL GRACIA

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística e I.O., Univ. del País Vasco, Vitoria

franciscoenrique.velasco@ehu.es, juanmiguel.gracia@ehu.es

<http://www.vc.ehu.es/campus/centros/farmacia/deptos-f/depme/gracia1.htm>

## Resumen

Utilizando ideas sobre el radio de estabilidad de matrices reales [3], Malyshev [2] logró una fórmula elegante que resolvió el problema de Wilkinson: Dada una matriz  $G \in \mathbb{C}^{q \times q}$  con todos sus valores propios simples hallar la matriz más próxima a  $G$ , en la norma espectral, que tenga algún valor propio múltiple. Este problema esperó solución durante tres décadas.

Malyshev [2, Section 6] observó que su fórmula permitía hallar el valor crítico de flameo “flutter analysis” de una matriz  $G \in \mathbb{R}^{q \times q}$ . Este análisis se utiliza en el estudio de vibraciones peligrosas de estructuras mecánicas tales como las alas de un avión o el tablero de un puente suspendido [4]. Si los valores propios de  $G$  son reales y simples, este valor crítico viene dado por

$$f_{\text{crit}} := \min\{\|Y - G\| : Y \in \mathbb{R}^{q \times q} \text{ tiene un valor propio múltiple real}\} \\ = \min_{x \in \mathbb{R}} \max_{t \geq 0} \sigma_{2q-1} \begin{pmatrix} xI - G & tI \\ 0 & xI - G \end{pmatrix}$$

A partir de  $f_{\text{crit}}$  el valor propio real doble (genéricamente) de  $Y$  se bifurca en dos valores propios complejos con parte imaginaria no nula y simples.

En esta comunicación resolvemos el problema de Wilkinson cuando se perturban únicamente los elementos de una submatriz sudeste de  $G$  (perturbación estructurada). Supongamos que  $G$  está partida en la forma  $G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  donde  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{C}^{m \times m}$  y  $q = n + m$ .

Empezamos por la cuestión: Si  $z_0 \in \mathbb{C}$  ¿cuál es la distancia desde  $D$  al conjunto  $\mathcal{M}$  de matrices  $X \in \mathbb{C}^{m \times m}$  tales que  $z_0$  es valor propio múltiple de  $G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$  en el caso de que este conjunto no sea vacío? Para analizar en qué casos  $\mathcal{M} = \emptyset$  utilizamos elementos de teoría de control (descomposición de Kalman, par controlable, par observable, forma canónica controladora, ...). En el caso particular en el que  $z_0$  recorra los números imaginarios puros y  $G$  sea una matriz estable, averiguamos la distancia mínima  $d$  de  $D$  a  $X$  tal que  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$  tiene un valor propio imaginario múltiple. Este valor  $d$  da un margen de seguridad que permite asegurar la acotación de todas las soluciones del sistema diferencial  $\dot{x} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} x$ , siempre que  $\|X - D\| < d$ .

**Sección en el CEDYA 2007:** Otros campos: Análisis matricial.

## Referencias

- [1] J. B. Hiriart-Urruty and D. Ye. *Sensitivity analysis of all eigenvalues of a symmetric matrix*. Numer. Math. 70 (1995), 45-72.
- [2] A.N. Malyshev. *A formula for the 2-norm distance from a matrix to the set of matrices with multiple eigenvalues*. Numer. Math. 83 (3) (1999), 443-454.
- [3] L. Qiu, B. Bernhardsson, A. Rantzer, E.J. Davison, P.M. Young, J.C. Doyle. *A formula for computation of the real stability radius*. Automatica 31 (6) (1995), 879-890.
- [4] A.P. Seyranian and A.A. Mailybaev. *Multiparameter stability theory with mechanical applications*. World Scientific, Singapore, 2003.

# Matrices con inversa positiva

MANUEL F. ABAD, JUAN R. TORREGROSA

Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia

maabrod@mat.upv.es, jrtorre@mat.upv.es

## Resumen

Una matriz real, no singular,  $A = (a_{ij})$ , de tamaño  $n \times n$ , se dice que es *inversa positiva* si todos los elementos de su inversa son no negativos. Estas matrices juegan un papel importante en Economía y en otras ciencias. Además, una matriz inversa positiva que sea también  $Z$ -matriz, es una  $M$ -matriz no singular, de manera que la clase de las matrices inversa positiva contiene a las  $M$ -matrices no singulares, las cuales han sido ampliamente estudiadas y cuyas aplicaciones, por ejemplo, en métodos iterativos, en sistemas dinámicos, en economía, en programación matemática,...., son sobradamente conocidas (ver [2]).

Otra clase de matrices, estrechamente relacionada con la anterior, es la de las matrices totalmente no negativas. Son matrices con todos sus menores no negativos. Aparecen con frecuencia en teoría de aproximación, estadística, diseño gráfico asistido por ordenador, etc.

El objeto de este trabajo es presentar un análisis de las matrices inversas positivas y su relación con otras clases de matrices. Presentamos una caracterización de este tipo de matrices en relación con la resolución de sistemas lineales. Concretamente:

*Una matriz real  $A$ ,  $n \times n$ , es inversa positiva si y sólo si para todo vector  $b \in R_+^n$ , existe  $x \in R_+^n$  tal que  $Ax = b$ .*

Estudiamos las propiedades hereditarias de las matrices inversa positiva, prestando especial atención a la suma sub-directa introducida por Fallat y Johnson en [3]. El concepto inversa positiva no se hereda, en general, por esta operación, por lo que presentamos condiciones necesarias y suficientes para garantizar que la suma sub-directa de matrices inversa positiva es también una matriz inversa positiva.

Por otra parte, caracterizamos las matrices inversa positiva que son totalmente no negativas y establecemos relaciones entre propiedades de la matriz  $A = (a_{ij})$  y la matriz  $A^* = (a_{ij}^*)$ , donde  $a_{ij}^* = (-1)^{i+j} a_{ij}$ . Entre otros resultados, demostramos que:

*Dada una matriz real  $A$ , de tamaño  $n \times n$ , si  $A^*$  es totalmente no negativa, entonces  $A$  es inversa positiva. El recíproco, en general, no es cierto*

Terminamos el trabajo presentando algunos ejemplos de matrices inversa positiva, que aparecen en problemas de discretización, de factorización de matrices, etc.

**Sección en el CEDYA 2007:** Matrices no negativas

## Referencias

- [1] T. Ando, *Totally positive matrices*. Linear Algebra and its Applications, 90 (1987), 165-219.
- [2] A. Berman, R. Plemmons, *Nonnegative matrices in the Mathematical Sciences*, Siam, 1994.
- [3] S. Fallat, C. Johnson, *Sub-direct sums and positivity classes of matrices*. Linear Algebra and its Applications, 288 (1999), 149-173.

# Una caracterización para la alcanzabilidad de sistemas periódicos generalizados con retardos de estados<sup>1</sup>

BEGOÑA CANTÓ, CARMEN COLL, ELENA SÁNCHEZ

Instituto de Matemática Multidisciplinar, Univ. Politécnica de Valencia

bcanto@mat.upv.es, mccoll@mat.upv.es, esanchezj@mat.upv.es

## Resumen

Los sistemas con retardo aparecen frecuentemente en modelos que representan procesos de control químicos, biológicos, eléctricos, etc. Así como, en cualquier tipo de proceso que involucre transmisión de datos a largas distancias.

La mayoría de las veces el modelado de estos procesos se realiza mediante un sistema lineal invariante, [3, 5]. Sin embargo, en ocasiones la naturaleza del proceso obliga a que los coeficientes del sistema dependan del tiempo. Por ejemplo, cuando esta variación es periódica aparecen los sistemas periódicos [2]. Además, algunas técnicas usadas para modelar sistemas de control en ingeniería conducen a una representación periódica. Este es el caso de la técnica conocida como multifrecuencia, [1].

Desafortunadamente, el retardo temporal inherente contenido en el comportamiento dinámico de la mayoría de los procesos físicos o de ingeniería tiene un efecto adverso sobre el comportamiento del modelo y hay que tenerlo en cuenta en el diseño del sistema para que su comportamiento sea lo más afín posible al comportamiento del proceso real.

El estudio de problemas con retardos en el tiempo ha recibido mucho interés por parte de los investigadores en teoría de control en los últimos años, siendo publicados diferentes trabajos como por ejemplo la resolución de problemas relativos a la estabilidad de este tipo de sistemas ha sido estudiado en [7, 6] y las propiedades estructurales en [4].

En este trabajo se estudia la influencia del pasado, dada por el retardo en los estados, en la solución de los sistemas periódicos. Por ello, en primer lugar se construye la forma explícita de la solución de este tipo de sistemas. Usando esta solución se obtienen las matrices de alcanzabilidad y se estudia el efecto de los retardos en esta propiedad estructural. Finalmente, se caracteriza dicha propiedad en términos matriciales.

**Sección en el CEDYA 2007:** CO, Control y Optimización

## Referencias

- [1] M. Bidani, M. Djemai, *A multirate digital control via a discrete-time observer for non-linear singularly perturbed continuous-time systems*, Int.J.Control, 75(8), (2002), 591-613.
- [2] R. Bru, R. Cantó, B. Ricarte, *Modelling nitrogen dynamics in citrus trees*, Mathematical and Computer Mod. 38 (2003) 975-987.
- [3] J.A. Jacquez, C.P. Simon, *Quantitative theory of compartmental systems*, SIAM Review 35(1) (1993) 43-79.
- [4] V.Y. Glicer, *Euclidean space controllability of singularly perturbed linear systems with state delay*, System and Control Letters 43 (2001) 181-191.
- [5] D.G. Luenberger, *Introduction to dynamic systems*, Vol. I, John Wiley and Sons Inc., New York, 1979.
- [6] M.S. Mahmoud, *Robust  $H_\infty$  control of discrete systems with uncertain parameters and unknown delays*, Automatica 36 (2000) 627-635.
- [7] S.L. Niculescu, R. Lozano, *On passivity of linear delay systems*, IEE Trans. Aut. Control 46(3) (2001) 460-464.

---

<sup>1</sup>Trabajo financiado por las ayudas españolas AGL2004-03262/AGR y GV06/118 y por el programa de investigación de la UPV.

# Un esquema de cuarto orden con casi-óptimo gasto computacional para ecuaciones no lineales

SERGIO AMAT, SONIA BUSQUIER, CONCHA BERMÚDEZ

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística, U.P. Cartagena.

sergio.amat@upct.es, sonia.busquier@upct.es, concepcion.bermudez@upct.es

SERGIO PLAZA

Dpto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Santiago de Chile.

splaza@lauca.usach.cl

## Resumen

La resolución de ecuaciones no lineales es sin duda uno de los problemas más clásicos en matemáticas. Para aproximar este tipo de problemas los métodos iterativos juegan un papel fundamental.

Al estudiar un método iterativo, uno de los aspectos más importante a considerar es la convergencia (orden del mismo). Para dicho análisis, en ocasiones, es suficiente conocer un intervalo  $[a, b]$  que contenga a la raíz, más ciertas hipótesis de regularidad, este tipo de convergencia se conoce como convergencia global. Otros resultados (“tipo Kantarovich”), establecen condiciones suficientes en el operador y en la primera aproximación a la solución (pivote) para asegurar que la sucesión generada por el esquema converja a una solución de la ecuación, dando lugar a los llamados teoremas semilocales de convergencia. Por último, en los llamados teoremas locales de convergencia, se imponen las hipótesis sobre la raíz buscada.

Por otro lado el coste computacional es la otra característica a estudiar.

En este trabajo, presentamos un método de tres pasos y de cuarto orden que tiene un coste computacional muy aceptable. Esto es debido a que no necesita segundas derivadas [1] y que la matriz de los sistemas lineales asociados es la misma en los tres pasos de cada iteración. Se estudiará su convergencia e implementación.

## Referencias

- [1] S. Amat, S. Busquier and J.M. Gutiérrez, *Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations*. J. Comput. Appl. Math. **157** (1), 197–205, (2003).
- [2] M.A. Noor and K.I. Noor, *Some iterative schemes for nonlinear equations*, Appl. Math. Comp., **183**, (2006), 774-779.



## *OctMesh*: un entorno de elementos finitos en *Octave*

J. RAFAEL RODRÍGUEZ GALVÁN  
Dpto. de Matemáticas, Univ. de Cádiz  
rafael.rodriguez@uca.es

### Resumen

En este trabajo se presenta a *OctMesh* [1], un entorno de herramientas o *toolbox* para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante el método de los elementos finitos sobre *Octave*. *Octave* [2] es un entorno de cálculo numérico con licencia libre que utiliza de forma nativa el lenguaje de *Matlab* y es altamente compatible con éste.

Técnicamente, *OctMesh*, constituye una interfaz para el acceso desde *Octave* a las posibilidades de *LibMesh* [3, 4], una biblioteca C++ para la simulación numérica de ecuaciones en derivadas parciales mediante el método de elementos finitos (también con licencia libre) desarrollada, en su mayor parte, en el CFDLab de la Universidad de Texas (aunque también ha contado con la contribución de otras personas y entidades).

*LibMesh* facilita el desarrollo de simulaciones numéricas utilizando elementos 1D, 2D ó 3D en arquitecturas paralelas (aunque puede funcionar en entornos secuenciales), además de incluir métodos para refinado adaptativo de mallas. Para todo ello utiliza varios paquetes de software de calidad contrastada, como la biblioteca paralela PETSc [5] o el paquete LAMMPS [6] para la resolución de sistemas lineales en máquinas secuenciales mediante métodos de Krylov.

Sin embargo, la simulación numérica utilizando *LibMesh* no está al alcance de aquellos investigadores que no dominen con soltura el lenguaje de programación C++. Además, el ciclo de trabajo en lenguajes compilados (diseño, programación, ejecución, depurado de errores) resulta con frecuencia poco ágil ante problemas de la complejidad de la resolución numérica de EDP. Con frecuencia, es conveniente utilizar lenguajes interpretados como *Freefem++* o *Matlab* (dotado de un *toolkit* de elementos finitos). El uso de *Matlab* puede resultar una posibilidad muy atractiva, debido a su gran popularidad y facilidad de uso, pero tiene el problema de ser, por sí sola, poco eficiente para aplicaciones que necesiten alto rendimiento.

En consecuencia, se ha desarrollado *OctMesh* con la intención de unir la potencia de *LibMesh* con la facilidad de uso del lenguaje de *Matlab*, intentando facilitar el desarrollo desde *Octave* de experimentos numéricos paralelos 1D, 2D ó 3D,

Internamente, *OctMesh* consiste en una serie de extensiones dinámicas para *Octave* (archivos *.oct*), escritas en C++ y que actúan como conexión con *LibMesh*, introduciendo un espacio de funciones adicionales a las existentes, por defecto, en *Octave*. Estas funciones permiten definir mallados, asociarles espacios de elementos finitos y fórmulas de cuadratura, montar y resolver los sistemas de ecuaciones asociados a las formulaciones variacionales de las EDP. Todo ello de forma interactiva o en programas (archivos *.m*) que utilizan el lenguaje interpretado *Octave/Matlab*.

Al crear estas nuevas funciones en *Octave*, se ha intentado conservar, en la medida de lo posible, la sintaxis original de las clases C++ que componen *LibMesh*. Esto no ha sido sencillo, pues el lenguaje *Matlab*, y por tanto el de *Octave*, no es orientado a objetos. Sin embargo se utilizaron una serie de técnicas avanzadas que permitieron soslayar con éxito este inconveniente.

Aunque el utilizar un lenguaje interpretado implica cierta pérdida de rendimiento en *OctMesh*, a los usuarios más avanzados les resultará útil la posibilidad de programar directamente en C++ con *LibMesh* las partes críticas del algoritmo, que pueden ser luego utilizadas desde un cuerpo del programa realizado con *OctMesh*; la afinidad de sintaxis pretende hacer natural para los desarrolladores el proceso de migración entre ambas.

Con la intención de evaluar las posibilidades y el rendimiento de *OctMesh*, se han desarrollado distintos experimentos numéricos, que serán presentados como conclusión.

**Sección en el CEDYA 2007:** OTROS TEMAS (Cálculo Científico y Computacional)

### Referencias

- [1] J. Rafael Rodríguez Galván. *OctMesh*. <http://octmesh.forja.rediris.es>
- [2] J.W. Eaton y otros. *Octave*. <http://www.octave.org>
- [3] B. Kirk, J. Peterson y otros. *LibMesh Finite Element Library*. <http://LibMesh.sourceforge.net/>
- [4] B. Kirk, J. Peterson, R.H. Stogner, G.F. Carey *LibMesh: A C++ Library for Parallel Adaptive Mesh Refinement/Coarsening*. Engineering with Computers, preprint (2006).
- [5] Argonne National Laboratory, Mathematics and Computer Science Division. *PETSC*. <http://www-unix.mcs.anl.gov/petsc/>
- [6] Skalicky T. *LAMMPS Reference Manual*. Dresden University of Technology.

# Operadores de reconstrucción y esquemas de subdivisión asociados.

J.C.TRILLO, S.AMAT

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística, Univ. Politécnica de Cartagena

jctrillo@upct.es, Sergio.Amat@upct.es

R.DONAT

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Valencia

donat@uv.es

## Resumen

Los esquemas de subdivisión son unas herramientas muy usadas en el diseño de curvas y superficies, y tienen también relación con otras aplicaciones interesantes en tratamiento digital de imágenes o en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Estos esquemas están basados en un conjunto de reglas, las cuáles aplicadas recursivamente permiten un refinamiento sucesivo de un conjunto inicial de puntos llamado puntos de control.

En su estudio aparecen temas tales como probar la convergencia del proceso de iteración, investigar la suavidad de la función límite del proceso (en caso de convergencia), así como la estabilidad de los esquemas, y también propiedades de preservación de la monotonía, de la positividad o de la convexidad.

Una manera de abordar estas cuestiones se basa en la estrecha relación entre esquemas de subdivisión y operadores de reconstrucción. Estos operadores de reconstrucción conectan datos discretos con un cierto espacio funcional, que dependerá de las aplicaciones en concreto. Nuestro objetivo es presentar ciertos operadores de reconstrucción y sus esquemas de subdivisión asociados, estudiando algunas propiedades relativas a los mismos.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] S. Amat, R. Donat, J. Liandrát, and J.C. Trillo. *Analysis of a new nonlinear subdivision scheme. Applications in image processing*. Foundations of Computational Mathematics, (2006), 6(2), 193-226.
- [2] F. Aràndiga and R. Donat. *Nonlinear Multi-scale Decompositions: The Approach of A. Harten*, Numerical Algorithms (2000), 23, 175-216.
- [3] A. Cohen, N. Dyn and B. Matei. *Quasilinear subdivision schemes with applications to ENO interpolation*. Appl. Comp. Harm. Anal., (2003), 15, 89-116.
- [4] G. Delauries, and S. Dubuc. *Symmetric Iterative Interpolation Processes*. Constr. Approx., (1989), 5, 49-68.
- [5] N. Dyn, A. Gregori, and D. Levin. *A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design*. Comput. Aided. Geom. Design., (1987), 4, 257-268.
- [6] N. Dyn, F. Kuijt, D. Levin, and R. van Damme. *Convexity preservation of the four-point interpolatory subdivision scheme*. Computer Aided Geometric Design, (1999), 16(8), 789-792.
- [7] M.S. Floater and C.A. Micchelli. *Nonlinear stationary subdivision*. Approximation theory: in memory of A.K. Varna, ed: Govil N.K, Mohapatra N., Nashed Z., Sharma A., Szabados J., (1998), 209-224.
- [8] F. Kuijt and R. van Damme. *Convexity preserving interpolatory subdivision schemes*. Const. Approx., (1998), 14, 609-630.
- [9] J.C. Trillo, *PHD thesis: Nonlinear multiresolution and its applications in image processing*, Univ. de Valencia, (2006).

# Reproductive and time periodic solutions for incompressible fluids

B. CLIMENT-EZQUERRA F. GUILLÉN-GONZÁLEZ

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla

bcliment@us.es, guillen@us.es

M.A. ROJAS MEDAR

IMECC-UNICAMP, Campinas, Brazil

marko@ime.unicamp.br

## Resumen

We study some problems related with time periodic solutions for models of incompressible fluids.

We recalling the main ideas to prove the existence of reproductive weak solutions (i.e. weak solutions defined in the time interval  $(0, T)$  taking the same initial and final values in time) for the Navier-Stokes equations and some variants where these ideas are applicable, such as Boussinesq, micropolar and magneto-micropolar models. This proof relies on the obtention of time periodic Galerkin approximations via Leray-Schauder point fixed argument.

Moreover, in the case of  $2D$  domains, using the uniqueness of weak solutions, the regularizing property of the system and the existence of global regular solutions when data are regular, one has that the periodic in time weak solutions defined as extension of reproductive solutions to the whole time interval  $(0, +\infty)$  will be regular solutions. An extension of these results to the  $3D$  case is possible imposing small enough external force, using the so called “weak/strong uniqueness” and the global strong solutions for small enough data.

Also, we study some coupled models for velocity and pressure dynamic variables with another variable where the maximum principle holds, such as the generalized Boussinesq model (with temperature-dependent viscosity) and a nematic liquid crystal model with a Ginzburg-Landau penalization. In these cases one has, thanks to an adequate reformulation of the problem by truncation, existence of reproductive weak solutions as limit of time periodic Galerkin approximations. It is important to remark that Galerkin approximations do not verify the maximum principle but their limit does.

Finally, we will see that, for these models related with the maximum principle, the argument to prove regularity of reproductive solutions in the Navier-Stokes framework are not valid in general. The particular case of generalized Boussinesq model with Neumann boundary condition for the temperature can be solved with other arguments, but the case of nematic liquid crystal model remains as an open problem.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] B. Climent, F. Guillén-González, M.A. Rojas-Medar *On the reproductive solutions for a nematic liquid crystal model.* Z. angew Math. Phys. 57 (2006), 1-15
- [2] B. Climent-Ezquerria, F. Guillén-González, M.A. Rojas-Medar, *Regular time-reproductive solutions for generalized Boussinesq model with Neumann boundary conditions for temperature.* To appear in *Proc. Royal Soc. A*.
- [3] S. Kaniel, M. Shinbrot, *A reproductive property of Navier-Stokes equations,* Arch. Rational Mech. Anal., 24 (1967), 362-369.
- [4] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and numerical analysis.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977.

# The numerical analysis of higher-order nonlinear FE method for advection dominated problems

SANDRA M.C. MALTA, REGINA C. C. DE ALMEIDA

Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC/MCT  
Av. Getúlio Vargas, 333 - Petrópolis, RJ  
25671-070, Brazil

smcm@lncc.br, rcca@lncc.br

## Resumen

It is well known that numerical simulations of convection-dominated problems present numerical difficulties related to the lack of stability: because convection dominates diffusion, classical Galerkin finite element (FE) methods generate unstable approximations, which usually exhibit spurious oscillations. The SUPG (streamline upwind Petrov-Galerkin) method, proposed by Brooks and Hughes [1], was the first variationally consistent, stable and accurate finite element model for advection dominated problems. For regular solutions this method presents quasi-optimal rates of convergence for the streamline derivative and was first analyzed by Johnson et al. [4]. Nevertheless, for nonregular solutions, localized oscillations are still observed in the neighborhood of steep gradients meaning that the streamline is not always the appropriate upwind direction. To overcome this lack of monotonicity many discontinuity capturing terms were designed to enhance stability either in a linear [5] or nonlinear way [2, 3]. Quite promising results were obtained using the nonlinear CAU (Consistent Approximate Upwind) finite element method proposed in [2]. The systematic way of updating the upwind direction in the CAU method results in adding to the SUPG formulation a nonlinear discontinuity-capturing term in a consistent way, engendering an additional stability in the direction of the approximate gradient. The theory has been refined over the years in several directions.

An important improved version of the CAU method, even for higher-order elements, has been discussed in the recent paper [3]. In this work a stability analysis was shown based on a linearized iterative scheme, which uses the solution of the SUPG method as an initial guess in order to solve the CAU (nonlinear) method. However, this analysis has some open ends [6] concerning the solvability of the iteration scheme. Therefore, our main goal is to improve the developed analysis. In particular, we address the problem associated to the convergence of the linearized iterative scheme as well as the existence of the solution for the nonlinear approximate method. The theoretical results will be supported by some numerical experiments.

**Palabras clave:** advection-diffusion equations, nonlinear finite element method, numerical analysis.

**Sección en el CEDYA 2007:** Análisis Numérico y Simulación Numérica

## Referencias

- [1] A.N. Brooks and T.J.R. Hughes, *Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 32(1982), 100-259.
- [2] A.C. Galeão and E.G. Dutra do Carmo, *A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 68(1988), 83-95.
- [3] A.C. Galeão, R.C. Almeida, S.M.C. Malta and A.F.D. Loula, *Finite element analysis of convection dominated reaction-diffusion problems*, Appl. Numer. Mathematics, 48(2004), 205-222.
- [4] C. Johnson, U. Navert and J. Pitkaranta, *Finite element methods for linear hyperbolic problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 45(1984), 285-312.
- [5] T. Knopp, G.Lube and G. Rapin, *Stabilized finite element methods with shock-capturing for advection-diffusion problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191(2002), 2297-3013.
- [6] G. Lube and G. Rapin *Residual-based stabilized higher-order FEM for advection-dominated problems*. Preprint-Serie des Instituts für Numerische Angewandte Mathematik, Göttingen, no. 2005-27.

# Esquemas numéricos bidimensionales de alto orden para el acoplamiento de ecuaciones de transporte y ecuaciones de aguas someras

J.A. GARCÍA RODRÍGUEZ

Dpto. de Matemáticas, E. P. S. , Univ. de A Coruña

jagrodriguez@udc.es

M.J. CASTRO DÍAZ , C. PARÉS

Dpto. de Análisis Matemático, Univ. de Málaga

castro@anamat.cie.uma.es, pares@anamat.cie.uma.es

E.D. FERNÁNDEZ NIETO

Dpto. de Matemática Aplicada I, Univ. de Sevilla

edofer@us.es

A.M. FERREIRO FERREIRO

Dpto. de Matemáticas, Univ. de A Coruña

aferreiro@udc.es

## Resumen

En este trabajo se lleva a cabo el desarrollo de esquemas bidimensionales de *alto orden* (ver [1]) empleando el método de *volúmenes finitos*, para la modelización del *transporte* inerte de una sustancia en un fluido, como por ejemplo, el caso de un vertido de contaminantes.

El modelo matemático consiste en el acoplamiento entre un sistema de ecuaciones de aguas someras y una ecuación de transporte:

$$\frac{\partial hC}{\partial t} + \frac{\partial q_x C}{\partial x} + \frac{\partial q_y C}{\partial y} = \sigma C_\sigma \quad (1)$$

siendo  $h$  el espesor de la capa de fluido,  $q_x, q_y$  el flujo en cada dirección,  $C(x, t)$  la concentración promediada de sustancia,  $\sigma(x, t)$  las fuentes emisoras (medida en  $m^2/seg$ ) y  $C_\sigma$  la concentración de sustancia en dichas fuentes.

Dicho acoplamiento da lugar a un nuevo campo linealmente degenerado en el sistema. Si dicha sustancia ocupa sólo una porción de fluido las fronteras de dicha porción se propagan como una discontinuidad de contacto (ver [4]). En consecuencia, para aproximar con precisión la evolución de un vertido es necesario desarrollar métodos numéricos que capturen adecuadamente las discontinuidades de contacto (ver [3]).

Finalmente, se presentan resultados numéricos para verificar el comportamiento de los esquemas obtenidos.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] A.M. Ferreiro Ferreiro. *Desarrollo de técnicas de post-proceso de flujos hidrodinámicos, modelización de problemas de transporte de sedimentos y simulación numérica mediante técnicas de volúmenes finitos*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla. 2006.
- [2] M. J. Castro, J. A. García , J. M. González, C. Pares. *A parallel 2D finite volume scheme for solving systems of balance laws with nonconservative products: application to shallow flows*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2005.
- [3] C. Parés, M.J. Castro. *On the well-balance property of Roe's method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to shallow-water systems*. ESAIM: M2AN, 38(5):821–852, 2004.
- [4] E. F. Toro. *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*. Wiley, 2001.

## Deducción y simulación numérica de un nuevo modelo de avalanchas submarinas

E.D. FERNÁNDEZ-NIETO<sup>1</sup>, F. BOUCHUT<sup>2</sup>, D. BRESCH<sup>3</sup>, M.J. CASTRO<sup>4</sup>, A. MANGENEY<sup>5</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla.

E.T.S. Arquitectura. Avda, Reina Mercedes, s/n. 41012 Sevilla, Spain

<sup>2</sup> Département de mathématiques et applications, CNRS & École normale supérieure, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France

<sup>3</sup> LAMA, UMR5127 CNRS, Univ. Savoie, 73376 Le Bourget du Lac (France)

<sup>4</sup> Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Málaga.

F. Matemáticas, Campus Teatinos S/N, Spain

<sup>5</sup> Département de modélisation physique et numérique, IPGP,

4, pl. Jussieu, 75232 Paris cedex 05, France

edofer@us.es, fbouchut@dma.ens.fr, Didier.Bresch@univ-savoie.fr,

castro@anamat.cie.uma.es, mangeney@ipgp.jussieu.fr

### Resumen

En este trabajo se estudia un nuevo modelo de tipo Savage-Hutter (ver [1] y [3]) para avalanchas submarinas. Se obtiene un modelo multicapa que se define en función de un término de tipo Coulomb, diferentes leyes constitutivas en los tensores de esfuerzo y la porosidad de la segunda capa de sedimento o roca. El modelo se puede aplicar al estudio de problemas de avalanchas submarinas y algunos tipos de tsunamis (ver [2]).

También se aborda la discretización del modelo obtenido mediante técnicas de volúmenes finitos bien equilibrados. La presencia del término de Coulomb es un problema adicional. En la discretización de este término debemos tener en cuenta el acoplamiento entre la capa de agua y la capa de sedimento, por lo que no es posible imponer de forma fuerte caudal nulo. Esta condición se debe imponer cuando el término de Coulomb sea menor que un cierto valor crítico, en función del ángulo de reposo. Se presentaran algunos resultados numéricos sobre las aplicaciones anteriores.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

### Referencias

- [1] F. Bouchut, A. Mangeney-Castelnau, B. Perthame, J.P. Vilotte, *A new model of Saint Venant and Savage-Hutter type for gravity driven shallow flows*. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser I 336 531-536 (2003).
- [2] Ph. Heinrich, A. Piatanesi, H. Hébert *Numerical modelling of tsunami generation and propagation from submarine slumps: the 1998 Papua New Guinea event*. *Geophys. J. Int.* 145, 97-11, (2001)
- [3] S.B. Savage, K. Hutter, *The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to run-out*, *Acta Mech.* 86, 201-223 (1991).

# Esquemas 2D de alto orden basados en reconstrucciones de estado, para sistemas hiperbólicos no conservativos. Aplicación a problemas de transporte de sedimentos.

A.M. FERREIRO FERREIRO

Dpto. de Matemáticas, E. U. Arquitectura Técnica, Univ. de A Coruña  
aferreiro@udc.es

M.J. CASTRO DÍAZ

Dpto. de Análisis Matemático, Univ. de Málaga  
castro@anamat.cie.uma.es

E.D. FERNÁNDEZ NIETO

Dpto. de Matemática Aplicada I, Univ. de Sevilla  
edofer@us.es

## Resumen

El problema de arrastre de sedimentos puede englobarse dentro del marco de los sistemas hiperbólicos no conservativos [3]. En este tipo de problemas la velocidad de propagación del fluido es mucho mayor que la del sedimento, por tanto, para poder capturar correctamente la evolución de fluido-sedimento, es necesario aplicar esquemas de alto orden para resolverlos.

En este trabajo se propone un esquema 2D generalizado de Roe con reconstrucciones de estado para sistemas hiperbólicos no conservativos [3], mediante esquemas de volúmenes finitos y empleando el método de líneas ([4]), extendiendo los esquemas de alto orden para el caso 1D propuesto en [2].

La reconstrucción de estado empleada es de tipo MUSCL ([1]), que proporciona orden dos para mallas no estructuradas, en las que se emplean volúmenes finitos de tipo arista. En función del limitador de pendiente se propone una reconstrucción de estado más robusta. No se abordan operadores de reconstrucción de orden superior, pues para mallas no estructuradas supone un elevado coste computacional.

Con el fin de validar el esquema numérico propuesto, se han llevado a cabo diversos tests, tanto académicos como de laboratorio, que permiten comparar la mejora de la precisión del esquema presentado.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] B. Van Leer. *MUSCL. A new approach to numerical gas dynamics. Computing in plasma physics and astrophysics, Max-Planck-Institut fur plama physik.*. Carchung, Germany, April 1976.
- [2] M.J. Castro, J.M. Gallardo, Carlos Parés. *Finite volume schemes based on weno reconstruction of states for solving nonconservative hyperbolic systems. Applications to shallow water systems.* Mathematics of Computation. Mah. Comp. 2005.
- [3] A.M. Ferreiro Ferreiro. *Desarrollo de técnicas de post-proceso de flujos hidrodinámicos, modelización de problemas de transporte de sedimentos y simulación numérica mediante técnicas de volúmenes finitos.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla. 2006.
- [4] J.A. García Rodríguez. *Paralelización de esquemas de volúmenes finitos: aplicación a la resolución de sistemas de tipo aguas someras.* Tesis Doctoral. Universidad de Málaga. 2005.

# Homogeneización de problemas (elasto)hidrodinámicos en lubricación

CARLOS VÁZQUEZ

Dpto. de Matemáticas, Univ. de A Coruña

carlosv@udc.es

GUY BAYADA

Centre de Maths, INSA de Lyon

Guy.Bayada@insa-lyon.fr

SÉBASTIEN MARTIN

Dépt. Mathématiques, Université Paris Sud

sebastien.martin@math.u-psud.fr

## Resumen

La creciente presencia de dispositivos industriales, que conllevan contactos lubricados por capas delgadas de fluido, motiva el interés por proponer los modelos matemáticos más adecuados para la simulación numérica de los mismos. En muchas situaciones prácticas es interesante la introducción de rugosidades periódicas en las superficies (deformables o no) durante la fabricación. En el marco de contactos lubricados entre superficies rugosas, se mostrará como las técnicas de homogeneización permiten obtener modelos matemáticos adecuados para la simulación numérica eficiente de los procesos. Los modelos matemáticos se basan en ecuaciones de tipo Reynolds para la presión del lubricante, relaciones no lineales presión-saturación para la cavitación y leyes elásticas para la relación presión-deformación.

El presente trabajo trata sobre la homogeneización de un problema de lubricación, utilizando técnicas de doble escala [1]. Fundamentalmente, se obtiene un modelo de Reynolds-Hertz, que contempla la presencia de efectos debidos a superficies rugosas con oscilaciones periódicas e incorpora deformaciones elásticas asociadas a contactos locales [2]. La geometría de la rugosidad depende de un pequeño parámetro asociado a la frecuencia de la misma. Una de las principales dificultades en la homogeneización es el carácter no lineal del modelo de frontera libre para la cavitación. Esta dificultad se ilustrará con la presentación de la homogeneización de un modelo hidrodinámico para superficies no deformables [3]. Otras dificultades son los aspectos no locales del modelo de Hertz y la ley de viscosidad no lineal, que se ilustran en la homogeneización modelo elastohidrodinámico [2].

Finalmente, se presentan resultados numéricos sobre un problema real, comparando el modelo dependiente del pequeño parámetro y el modelo homogeneizado [4]. Para ello se han utilizado métodos numéricos adecuados.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP y AN

## Referencias

- [1] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, **23**, (1992), 1482–1518.
- [2] G. Bayada, S. Martin, C. Vázquez, Homogenization of a nonlocal elastohydrodynamic lubrication problem: a new free boundary model, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* **15**, (2005), 1923–1956.
- [3] G. Bayada, S. Martin, C. Vázquez, Two-scale homogenization of Elrod-Adams model, *Asymp. Anal.* **44**, (2005), 75–110.
- [4] G. Bayada, S. Martin, C. Vázquez, Micro-roughness effects in elasto(hydrodynamic) lubrication including a mass-flow preserving cavitation model, *Tribology International* **39**, (2006), 1707–1718.



# On the Locally Discontinuous Galerkin Method for problems with Signorini–type conditions

ROMMEL BUSTINZA

Dpto. de Ingeniería Matemática, Univ. de Concepción (Chile)

rbustinz@ing-mat.udec.cl

FRANCISCO-JAVIER SAYAS

Dpto. de Matemática Aplicada, CPS, Univ. de Zaragoza

jsayas@unizar.es

## Resumen

In this talk we study the applicability of Discontinuous Galerkin methods to a class of variational inequalities arising from problems with Signorini–type (also called frictional) boundary conditions. In particular, we center our attention in the Locally Discontinuous Galerkin method of Cockburn and Shu, applied to a Poisson equation with boundary condition

$$u \geq 0, \quad \partial_\nu u \geq g, \quad u(\partial_\nu u - g) = 0$$

in part of the boundary and homogeneous Dirichlet condition on the remaining part. We derive a local description of the LDG method for this problem and write an equivalent reduced formulation, that is equivalent to a minimization problem in a space of discontinuous piecewise polynomial functions with a discrete version of the positivity condition on the boundary.

Based on this reduced formulation, we will discuss convergence and stability issues for the method. We will also deal with different possibilities for solving the inherent minimization problem, using the conjugate gradient method with projection or the associated Kuhn–Tucker system and an iterative method for it. Since the primal formulation is purely theoretical (the associated bilinear form cannot be assembled in a simple way), we will show how the iterations of the different methods require solving linear problems by an LDG method.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

# Filtros adaptativos para el tratamiento de la oclusión en el seguimiento de objetos

E. PARRILLA, J. RIERA

Dpto. de Física Aplicada, Univ. Politécnica de Valencia

edparber@fis.upv.es, jriera@fis.upv.es

D. GINESTAR, J.L. HUESO, J.R. TORREGROSA

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Politécnica de Valencia

dginesta@mat.upv.es, jlhueso@mat.upv.es, jrtorre@mat.upv.es

## Resumen

La visión artificial es un subcampo de la inteligencia artificial, cuyo propósito es programar un computador para que 'entienda' una escena o las características de una imagen. Los objetivos típicos de la visión artificial son muy variados, entre los que se incluyen la detección, segmentación, localización y reconocimiento de ciertos objetos en imágenes, seguimiento de un objeto en una secuencia, búsqueda de imágenes digitales por su contenido, etc. De todas estas tareas resulta de gran interés el seguimiento de objetos [1] por la gran cantidad de aplicaciones que posee como, por ejemplo, control y monitorización del tráfico [2], cálculo de velocidades 3D [3], guiado automático de vehículos, control visual de robots manipuladores, vigilancia, filtrado y compresión de vídeo, etc.

Muchos algoritmos de seguimiento están diseñados para trabajar aun existiendo oclusión parcial de los objetos en movimiento, es decir, los algoritmos no se pierden cuando el blanco desaparece temporalmente del fotograma y continúan correctamente cuando el blanco reaparece. Generalmente, esta clase de algoritmos incluyen un entrenamiento a priori de la posible forma del objeto a seguir y la oclusión es tratada siguiendo el movimiento del contorno. Este hecho provoca un elevado coste desde el punto de vista computacional, siendo estos algoritmos difíciles de implementar en aplicaciones de tiempo real.

En este artículo, estudiaremos un rápido y sencillo algoritmo de seguimiento de objetos, basado en el cálculo del flujo óptico de un conjunto poco denso de puntos. Dicho algoritmo, en base a diferentes criterios, realiza una selección de puntos de referencia representativos de los objetos en el primer fotograma de la secuencia a analizar. El movimiento de estos puntos es estimado mediante el cómputo del flujo óptico. Los métodos de este tipo son muy rápidos, pero no son muy robustos. Particularmente, no son capaces de tratar la oclusión de los objetos en movimiento del vídeo. Para mejorar este comportamiento, proponemos el uso de filtros adaptativos [4,5] para predecir las velocidades instantáneas esperadas de los objetos. Estas velocidades esperadas son comparadas con las calculadas mediante el flujo óptico y son usadas como indicadores del buen funcionamiento del método. De esta forma, en el caso de que el método de flujo óptico falle al calcular los valores razonables de las velocidades debido a la presencia de un obstáculo que oculte el objeto a seguir, se tomarán las velocidades predichas con el filtro como los valores fiables del movimiento del objeto, hasta que éste reaparezca y se pueda continuar con su seguimiento normal.

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] F. E. Trucco, K. Plakas, *Video Tracking: A Concise Survey*, IEEE Journal of Oceanic Engineering 31(2) (2006) 520-529.
- [2] R.M. Iñigo. *Application of machine Vision to Traffic Monitoring and Control*. IEEE Transactions on Vehicular Technology 38(3) (1989) 112-122.
- [3] E. Parrilla, J. Riera, M. H. Giménez, J. R. Torregrosa, J. L. Hueso. *Cálculo de velocidades mediante un sistema estereoscópico y algoritmos de flujo óptico*. Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (CEDYA), 2005.
- [4] S. Haykin. *Adaptive Filter Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ (1986).
- [5] L. Ljung. System Identification. *System Identification. Theory for the User*. Prentice-Hall, Upper Saddle River NJ. (1999).

# Análisis numérico de un problema de contacto viscoelástico en piezoelectricidad

JOSÉ R. FERNÁNDEZ

Dpto. de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela

jramon@usc.es

MIKAEL BARBOTEU, YOUSSEF OUAFIK

Laboratoire de Mathématiques et Physique pour les Systèmes (MEPS), Université de Perpignan

barboteu@univ-perp.fr, youssef.ouafik@univ-perp.fr

## Resumen

La piezoelectricidad es la capacidad de ciertos cristales (como el cuarzo), materiales cerámicos o, incluso, huesos del cuerpo humano para producir corriente eléctrica cuando se encuentran sometidos a esfuerzos o tensiones internas.

En este trabajo consideramos un problema de contacto cuasiestático en piezoelectricidad entre un cuerpo formado por un material viscoelástico y un obstáculo deformable. Hemos utilizado la conocida ley constitutiva electro-viscoelástica para simular el material (véase [1]) y la condición de respuesta normal, estudiada por ejemplo en [2], para modelizar el contacto. La formulación variacional de este problema se escribe de la forma siguiente:

Encontrar un campo de desplazamientos  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$  y un potencial eléctrico  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$  tales que  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$  y para todo  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\mathbf{w}))_Q + (\mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \varepsilon(\mathbf{w}))_Q + (\mathcal{E}\nabla\varphi(t), \varepsilon(\mathbf{w}))_Q + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}) \\ = (\mathbf{f}(t), \mathbf{w})_V \quad \forall \mathbf{w} \in V, \end{aligned} \quad (1)$$

$$(\beta\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \nabla\psi)_H = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, \quad (2)$$

donde  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , denota el intervalo temporal de interés,  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  y  $\varphi$  son el campo de desplazamientos, el campo de velocidades y el potencial eléctrico, respectivamente,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  representan los respectivos tensores de viscosidad y de elasticidad, y  $\varepsilon(\mathbf{u})$  es el tensor de deformaciones linealizado. Además,  $\mathcal{E}$  es el tensor piezoeléctrico de tercer orden y  $\beta$  representa el tensor de permitividad eléctrica. Finalmente,  $j$  es el funcional de contacto,  $\mathbf{f}$  y  $q$  incluyen las fuerzas superficiales y volúmicas y la densidad de corriente eléctrica interna, respectivamente, y  $V$  y  $W$  son los espacios variacionales donde definimos la solución del problema.

En [3] se demostró un resultado de existencia y unicidad de solución débil. Nuestro objetivo se centra, por tanto, en introducir un esquema de discretización completamente discreto, usando el método de los elementos finitos para aproximar la variable espacial y el esquema de Euler implícito para discretizar las derivadas temporales, y probar un resultado general de estimación del error. De este podemos deducir, bajo condiciones de regularidad adicionales, la convergencia lineal del algoritmo respecto de los parámetros de discretización espacial y temporal. Finalmente, presentamos dos ejemplos numéricos que muestran, en primer lugar, la convergencia del algoritmo en un ejemplo test simple y, en segundo lugar, la relación que existe entre la deformación del cuerpo y el potencial eléctrico; es decir, veremos como variaciones del potencial eléctrico pueden producir deformaciones en el cuerpo.

Sección en el CEDYA 2007: AN

## Referencias

- [1] T. Iedea, *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [2] J.A.C. Martins y J.T. Oden, *Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws*. *Nonlinear Anal.*, 11(3) (1987), 407–428.
- [3] M. Sofonea y E.-H. Essoufi, *Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body*. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 14(1) (2004), 25–40.

# Tratamiento asintótico de las condiciones de contorno para problemas de convección dominante

ISABEL SÁNCHEZ MUÑOZ

Dpto. de Matemática Aplicada I, Univ. de Sevilla

isanchez@us.es

TOMÁS CHACÓN REBOLLO, MACARENA GÓMEZ MARMOL

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Univ. de Sevilla

chacon@us.es, macarena@us.es

## Resumen

Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbf{R}^n$  de clase  $C^1$  con frontera  $\Gamma$ . Consideramos un campo de velocidades  $\mathbf{v}$  definido en un abierto  $V$  que contiene a  $\bar{\Omega}$  y que suponemos de clase  $C^1(V)$  y con divergencia nula en  $V$ . Llamamos  $\Gamma^-$  a la parte de la frontera de entrada de flujo, es decir,  $\Gamma^- = \{x \in \partial\Omega, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0\}$ , siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario y exterior en  $\Gamma$ . Consideramos también una función  $f \in L^2(\Omega)$  y una función  $g \in L^2(\{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}; \Gamma^-\})$ , y por último, un parámetro positivo  $\mu$ .

Con estos datos, planteamos el siguiente problema de convección-difusión:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } w \text{ tal que:} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla w - \mu \Delta w = f \quad \text{en } \Omega; \\ w \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \mu \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \Gamma^-; \\ \mu \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } \Gamma \setminus \Gamma^-. \end{array} \right. \quad (1)$$

En este trabajo, estudiamos la convergencia cuando el coeficiente de difusión  $\mu$  tiendo a cero, de la solución de este problema a la del siguiente problema de convección pura:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } w \text{ tal que} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla w = f \quad \text{en } \Omega; \\ w = g \quad \text{en } \Gamma^-. \end{array} \right. \quad (2)$$

Como resultado de nuestro análisis, obtenemos que esta convergencia se verifica en el sentido de la convergencia débil en un espacio de Hilbert asociado a la derivada convectiva y la convergencia fuerte en  $L^2(\Omega)$  y la de las trazas en el espacio correspondiente,  $L^2(\{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}; \Gamma^-\})$ . La clave para ello, reside en la elección de funciones test que nos permiten obtener estimaciones a priori adecuadas y en dar al problema convectivo un tratamiento variacional, extendiendo las ideas de Azérad en [1].

Como consecuencia de este estudio teórico, podemos afirmar que para flujos gobernados por ecuaciones de convección-difusión, pero predominantemente convectivos en la frontera de entrada de flujo, imponer el flujo total en esta parte de la frontera es una buena aproximación a dar una condición de tipo Dirichlet. Justificamos así, la forma no estándar en la que se imponen numéricamente las condiciones de contorno en algunos métodos numéricos de resolución de modelos de convección-difusión (véase [3], [2] y [4], como ejemplos).

**Sección en el CEDYA 2007:** EDP

## Referencias

- [1] P. Azérad, J. Pousin, *Inégalité de Poincaré courbe pour le traitement variationnel de l'équation de transport*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 322 (1996), 721-727.
- [2] S. Camarri, M. V. Salvetti, B. Koobus, A. Dervieux, *Large-eddy simulation of a bluff-body flow on unstructured grids*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 40 (2002), 1431-1460.
- [3] T. Chacón, D. Franco, F. Ortégón, I. Sánchez, *Modelling of compressible flows with highly oscillating initial data by homogenization*, Applied Numerical Mathematics, vol. 26 (1998), 435-464.
- [4] C. Le Ribault, L. Le Penven, M. Buffat, *LES of the compressed Taylor vortex flow using a finite volume/finite element method on unstructured grids*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 52 (2006), 355-379.

# Esquemas centrados de cuarto orden no oscilatorios para leyes de conservación hiperbólicas

ÁNGEL BALAGUER-BESER

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Politécnica de Valencia.

Camino de Vera s/n, 46071 Valencia. Spain.

abalague@mat.upv.es

## Resumen

En este trabajo se presenta un nuevo algoritmo de reconstrucción, de cuarto orden, que utiliza un esquema centrado de volúmenes finitos para resolver leyes de conservación hiperbólicas. La aproximación temporal se realiza mediante los esquemas tipo Runge-Kutta centrados descritos en Pareschi, Puppo, Russo [2]. Un esquema de volúmenes finitos permite la discretización espacial, siendo necesaria la reconstrucción de valores puntuales en función de valores promedio.

El algoritmo de reconstrucción utilizado en este trabajo es de cuarto orden y conservativo, con carácter no oscilatorio. Para el cumplimiento de esta última propiedad se impone la restricción de que el polinomio de reconstrucción conserve la monotonía de los promedios en cada celda y garantice que el número de puntos extremos en la solución no exceda del número de máximos y mínimos que posee la condición inicial, condiciones que han sido usadas en Balaguer y Conde [1].

El esquema descrito se ha aplicado con éxito en la resolución de varios problemas tipo test en sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Se han resuelto problemas con flujos no convexos y con discontinuidades. Dichos ejemplos demuestran que el método es de cuarto orden y presenta un carácter no oscilatorio.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] A. Balaguer, C. Conde. *Fourth-order non-oscillatory upwind and central schemes for hyperbolic conservation laws*. SIAM J. Numer. Anal., 43 (2), (2006), 455-473.
- [2] L. Pareschi, G. Puppo, G. Russo. *Central Runge-Kutta schemes for conservations laws*. SIAM J. Sci. Comput. 26 (3), (2005), 979-999.

## Análisis numérico de un modelo de remodelación ósea

REBECA MARTÍNEZ, JOSÉ R. FERNÁNDEZ, JUAN M. VIAÑO

Dpto. de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela

rebeca.martinez2@rai.usc.es, jramon@usc.es, maviano@usc.es

### Resumen

En este trabajo se estudia, desde el punto de vista numérico, un modelo de remodelación ósea. Este modelo se caracteriza por una ecuación variacional elíptica para el campo de desplazamientos y una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en tiempo para describir el proceso fisiológico de remodelado óseo. La evolución de la función de remodelación ósea se obtiene de la siguiente ecuación diferencial ordinaria (véase [1]):

$$\dot{e} = a(e) + \mathcal{A}(e) : \varepsilon(\mathbf{u}),$$

donde  $e$  es la función que mide la variación de la fracción volúmica del hueso desde una configuración de referencia,  $\mathbf{u}$  y  $\varepsilon(\mathbf{u})$  representan el campo de desplazamientos y el tensor de deformaciones linealizado, respectivamente,  $a(e)$  es una función constitutiva y  $\mathcal{A}(e)$  denota un tensor de segundo orden que incluye los coeficientes de remodelación. Bajo ciertas hipótesis sobre los datos, en [3] se establece un resultado de existencia y unicidad de solución débil. Utilizando el método de elementos finitos para aproximar la variable espacial y un esquema de Euler para discretizar las derivadas temporales, obtenemos aproximaciones discretas de este problema variacional y probamos un resultado de estimación del error que generaliza el obtenido en [2] para un caso unidimensional simplificado. Bajo condiciones de regularidad adecuadas, deducimos la convergencia lineal del algoritmo respecto de los parámetros de discretización. Finalmente, presentamos algunos resultados numéricos, en una y dos dimensiones, para mostrar la validez y eficiencia del algoritmo.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

### Referencias

- [1] S.C. Cowin y D.H. Hegedus, Bone remodeling I: theory of adaptive elasticity, *J. Elasticity* 6 (3) (1976) 313–326.
- [2] I.N. Figueiredo, Approximation of bone remodeling models, *J. Math. Pures Appl.* 84 (2005) 1794–1812.
- [3] J. Monnier y L. Trabucho, Existence and uniqueness of a solution to an adaptive elasticity model, *Math. Mech. Solids* 3 (1998) 217–228.

# Resolución numérica de problemas evolutivos semilineales sobre dominios irregulares mediante métodos miméticos paralelizables

L. PORTERO, A. ARRARÁS, J.C. JORGE

Dpto. de Ingeniería Matemática e Informática, Univ. Pública de Navarra  
laura.portero@unavarra.es, andres.arraras@unavarra.es, jcjorge@unavarra.es

## Resumen

En este trabajo analizamos una nueva clase de métodos para la resolución numérica eficiente de problemas parabólicos semilineales modelizados mediante la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x}, t)) - S(\psi(\mathbf{x}, t)) + f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T],$$

acompañada de ciertas condiciones iniciales y de contorno. Suponemos que el dominio espacial  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  es un conjunto abierto y acotado de geometría irregular,  $K$  es un tensor simétrico y definido positivo,  $S$  es una función no lineal suave y  $f$  es un término fuente/sumidero.

La solución numérica de la ecuación anterior se obtiene combinando dos procesos de discretización. En primer lugar, realizamos una integración en tiempo mediante un método Runge-Kutta de pasos fraccionarios linealmente implícito (ver [2]). Para ello consideramos sendas particiones del operador  $A \equiv \nabla \cdot (K(\mathbf{x}) \nabla \cdot)$  y del término fuente  $f$  subordinadas a una descomposición de  $\Omega$  en un conjunto de subdominios solapados  $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$  (ver [3]). Mediante esta integración temporal, el PVIC parabólico original se reduce a un conjunto de problemas de contorno elípticos, uno por cada etapa interna. Puesto que el integrador temporal elegido es de tipo pasos fraccionarios, tan sólo una parte del operador  $A$  actúa implícitamente en cada etapa interna. Por otro lado, el hecho de que utilicemos un método linealmente implícito hace que el término no lineal  $S$  sea tratado explícitamente y que, por tanto, el problema de contorno obtenido en cada etapa interna sea lineal.

A continuación, este conjunto de problemas elípticos se discretiza en espacio mediante un esquema de diferencias finitas sobre un mallado rectangular lógico; dicho esquema está basado en el método de los operadores-soporte (ver [4]). Dado que la partición para el operador  $A$  está subordinada a una descomposición de  $\Omega$ , el problema elíptico previamente obtenido para cada etapa interna se reduce a un sistema lineal de ecuaciones que involucra incógnitas en tan sólo uno de los subdominios  $\Omega_i$ . Si además cada uno de estos subdominios  $\Omega_i$  está formado por un cierto número  $m_i$  de componentes conexas disjuntas, este sistema lineal puede descomponerse en un conjunto de  $m_i$  subsistemas lineales desacoplados; por ello, su resolución es fácilmente paralelizable. Nótese que la principal ventaja de esta técnica en comparación con métodos clásicos de descomposición de dominios radica en que no es necesario realizar iteraciones de Schwarz. Además, cabe destacar que el esquema totalmente discreto así obtenido preserva algunas propiedades del esquema semi-discreto en tiempo, tales como la simetría y conservación de masa; debido a ello, dicho método se dice mimético (ver [1]).

Finalmente, mostramos un experimento numérico que modeliza flujos de Darcy isoterms en medios porosos anisótropos estratificados con el fin de ilustrar el comportamiento del método numérico propuesto.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] M. Berndt, K. Lipnikov, J.D. Moulton and M.J. Shashkov. Convergence of mimetic finite difference discretizations of the diffusion equation, *East-West J. Numer. Math.* **9**(4) (2001), 253 – 316.
- [2] B. Bujanda and J.C. Jorge. Stability results for linearly implicit fractional step discretizations of non-linear time dependent parabolic problems, *Appl. Numer. Math.* **56**(8) (2006), 1061 – 1076.
- [3] L. Portero, B. Bujanda and J.C. Jorge. A combined fractional step domain decomposition method for the numerical integration of parabolic problems, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **3019** (2004), 1034 – 1041.
- [4] M. Shashkov. *Conservative finite-difference methods on general grids*, Symbolic and Numeric Computation Series, CRC Press, Boca Raton, 1996.

# Fifth order accurate numerical approximation of Hamilton-Jacobi equations

SUSANA SERNA

Department of Mathematics, University of California Los Angeles

serna@math.ucla.edu

## Resumen

We present a class of Weighted Power-ENO (Essentially Non Oscillatory) schemes to approximate the viscosity solutions ([1, 2, 6]) of Hamilton-Jacobi equations. Hamilton-Jacobi equations appear in many applications, for example, geometrical optics, optimal control, differential games, material sciences and calculus of variations. Therefore, it is essential to develop efficient, high order accurate numerical methods to solve these equations.

The Weighted Power-ENO schemes ([9]) were originally developed for hyperbolic conservation laws. The essential idea of the Power-ENO reconstruction is to apply a class of extended limiters ([8, 9]) to second order differences in the classical third order ENO ([3, 7]) reconstruction, so that the reconstruction is able to retain more information of the fine scales of the solution and improve resolution near discontinuities of the solution. A weighting strategy based on appropriate smoothness indicators ([5]) is then used to improve the reconstruction to be fifth order accurate; this is the so-called Weighted Power-ENO reconstruction. Here we adapt such Weighted Power-ENO reconstruction to Hamilton-Jacobi equations, ([10]).

Our high order numerical schemes for Hamilton-Jacobi equations consist of three ingredients: a monotone numerical Hamiltonian, the fifth order Weighted PowerENO reconstruction and a fourth order strong stability preserving Runge-Kutta time stepping procedure, [11].

We give extensive numerical examples to demonstrate the accuracy, robustness and the resolution capability of the new scheme including a 2-D non-convex Riemann problem, a problem related to optimal control, and an application of high order accurate *level set* reinitialization using noisy distance functions as initial data.

In comparison to the standard fifth order WENO scheme ([4, 5]), the resulting scheme enjoy similar overhead and have much better capability of resolving viscosity solutions near kinks where the solution has discontinuous gradients as illustrated in the numerical examples.

**Sección en el CEDYA 2007:** AN

## Referencias

- [1] Crandall, M. and Lions, P., *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 277, (1983), pp. 1–42.
- [2] Crandall, M. and Lions, P., *Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Math. Comput, 43, (1984), pp. 1–19.
- [3] Harten, A., Engquist, B., Osher, S., and Chakravarty, S., *Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III*, J. Comput. Phys., 71, (1987), pp. 231–303.
- [4] Jiang, G.S., and Peng, D., *Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Sci. Comput., 21,(2000), pp. 2126–2143.
- [5] Jiang, G.S., and Shu, C.W. *Efficient Implementation of weighted ENO schemes*, J. Comput. Phys., 126, (1996), p. 202-228.
- [6] Osher, S.J. and Sethian, J. , *Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, J. Comput. Phys., 79, (1988), pp. 12–49.
- [7] Osher, S.J. and Shu, C.W. , *High-order essentially non-oscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Numer. Anal., 28, (1991), pp. 907–922.
- [8] S. Serna, *A class of extended limiters applied to Piecewise Hyperbolic methods*, SIAM Journal of Scientific Computing, v28 (1), 123-140, 2006.
- [9] Serna, S. and Marquina, A., *Power ENO Methods: A fifth order accurate Weighted Power ENO method*, J. Comput. Phys., 194, (2004), pp. 632–658.
- [10] S. Serna, J Qian, *Fifth Order Weighted Power-ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations*, Journal of Scientific Computing, v29, 57-81, 2006.
- [11] Spiteri, R. J. and Ruuth, S. J., *A new class of optimal high order strong stability preserving time discretization methods*, SIAM J. Num. Anal., 40, (2002), pp 469-491.



## **LISTA DE PERSONAS INSCRITAS**



Abad Rodríguez, Manuel Francisco ...	Universidad Politécnica de Valencia
Abderramán Marrero, Jesús C. ....	Universidad Politécnica de Madrid
Alonso Mallo, Isaías .....	Universidad de Valladolid
Alvarez-Nodarse, Renato .....	Universidad de Sevilla
Amat Plata, Sergio .....	Universidad Politécnica de Cartagena
André Alves Simões, Maria Manuela ..	Instituto Politécnico da Guarda (Portugal)
Aranda Ortega, Ernesto .....	Universidad de Castilla - La Mancha
Arcoya ÁLvares, David .....	Universidad de Granada
Arjona Almodóvar, Alicia .....	CSIC - Universidad Complutense de Madrid
Arrarás Ventura, Andrés .....	Universidad Pública de Navarra
Arregui, Iñigo .....	Universidad de La Coruña
Arrieta, Jose M. ....	Universidad Complutense de Madrid
Asensio Madrid, Gabriel .....	Universidad Politécnica de Madrid
Bailo Ballarín, Esteban .....	Universitat de Lleida
Balaguer-Beser, Angel .....	Universidad Politécnica de Valencia
Balibrea Gallego, Francisco .....	Universidad de Murcia
Baragaña Gárate, Itziar .....	Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea
Barrabés Vera, Esther .....	Universidad de Girona
Barrio Gil, Roberto .....	Universidad de Zaragoza
Bellido Guerrero, José Carlos .....	Universidad de Castilla-La Mancha
Belmonte Beitia, Juan .....	Universidad de Castilla-La Mancha
Benítez García, Marta .....	Universidad de Santiago de Compostela.
Bermejo Bermejo, Rodolfo .....	Universidad Politécnica de Madrid
Bermúdez Edo, María Concepción ....	Universidad Politécnica de Cartagena
Blanc, Xavier .....	Université Paris 6 (Francia)
Blasco Lorente, Jordi .....	Universidad Politecnica de Cataluña
Boal Sánchez, Natalia .....	Universidad de Zaragoza
Boccardo, Lucio .....	Università di Roma 1 (Italia)
Boldrini, José Luiz .....	Universidade Estadual de Campinas (Brasil)
Braack, Malte .....	University of Kiel (Alemania)
Braz e Silva, Pablo .....	Universidade Federal de Pernambuco (Brasil)
Brenier, Yann .....	CNRS FR2800, Universite de Nice
Bru García, Rafael .....	Universidad Politécnica de Valencia
Bruzón Gallego, Maria de los Santos ..	Universidad de Cádiz
Buades Capo, Antonio .....	Universitat Illes Balears
Bujanda Cirauqui, Blanca .....	Universidad Pública de Navarra
Bustinza, Rommel .....	Universidad de Concepcion (Chile)
Cáceres Granados, María José .....	Universidad de Granada
Cadarso-Suárez, Carmen .....	Universidad de Santiago de Compostela
Caffisch, Russel .....	University of California, Los Angeles (USA)
Calvo Jurado, Carmen .....	Universidad de Extremadura
Calzada Canalejo, Carmen .....	Universidad de Córdoba
Calzada Delgado, Juan A. ....	Universidad de Valladolid
Camacho Vázquez, Gema .....	Universidad de Sevilla
Cañada Villar, Antonio .....	Universidad de Granada
Cannarsa, Piermarco .....	Università di Roma Tor Vergata (Italia)

Canogar McKenzie, Roberto .....	Universidad Nacional de Educación a Distancia
Canto Colomina, Begoña .....	Universidad Politécnica de Valencia
Cantó Colomina, Rafael .....	Universidad Politécnica de Valencia
Capdeboscq, Yves .....	Université de Versailles Saint-Quentin (Francia)
Caraballo, Tomás .....	Universidad de Sevilla
Carmona Centeno, Victoriano .....	Universidad de Sevilla
Carpio Huertas, Jaime .....	Universidad Politécnica de Madrid
Casado Díaz, Juan .....	Universidad de Sevilla
Casal Piga, Alfonso Carlos .....	Universidad Politécnica de Madrid
Casas, Pablo S. ....	Universidad Politécnica de Cataluña
Castro, Carlos .....	Universidad Politécnica de Madrid
Castro Díaz, Manuel Jesús .....	Universidad de Málaga
Castro Smirnova, Mirta María .....	Universidad de Sevilla
Cea, Luis .....	Universidad de A Coruña
Chacón Rebollo, Tomás .....	Universidad de Sevilla
Chacón Vera, Eliseo .....	Universidad de Sevilla
Chalco Cano, Yurilev .....	Universidad de Tarapacá (Chile)
Chierchia, Luigi .....	Università di Roma 3 (Italia)
Cid Araujo, Jose Angel .....	Universidad de Jaen
Clavero, Carmelo .....	Universidad de Zaragoza
Climent, Joan-Josep .....	Universitat d'Alacant
Climent Ezquerria, Blanca .....	Universidad de Sevilla
Clotet Juan, Josep .....	Universitat Politècnica de Catalunya
Codina, Ramón .....	CIMNE - Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
Coll Vicens, Bartomeu .....	Universitat Illes Balears
Colorado Heras, Eduardo .....	Universidad de Granada
Cors, Josep M. ....	Universidad Politécnica de Cataluña
Cortés Utrillas, Vanesa .....	Universidad de Zaragoza
Couce Calvo, Julio .....	Universidad de Sevilla
Cuesta Montero, Eduardo .....	Universidad sde Valladolid
Dal Maso, Gianni .....	SISSA (Italia)
de Hoyos Izquierdo, Inmaculada .....	Universidad del País Vasco / EHU
de la Hoz Méndez, Francisco .....	Universidad del País Vasco
de Prada Pérez, Paz .....	Universidad de Lleida
De Terán Vergara, Fernando .....	Universidad Carlos III de Madrid
de Teresa, Luz .....	Universidad Nacional Autónoma de México
Deco, Gustavo .....	ICREA / Universitat Pompeu Fabra
Delgado Delgado, Manuel .....	Universidad de Sevilla
Díaz Moreno, José Manuel .....	Universidad de Cadiz
Domínguez, Víctor .....	Universidad Pública de Navarra
Domínguez de la Iglesia, Manuel .....	Universidad de Sevilla
Domínguez Delgado, Antonio .....	Universidad de Sevilla
Donoso, Alberto .....	Universidad de Castilla-La Mancha
Doubova Krasotchenko, Anna .....	Universidad de Sevilla
Durany, José .....	Universidad de Vigo

Echevarría Líbano, Rosa .....	Universidad de Sevilla
El-Ghamry, Ramón .....	Universidad Politécnica de Valencia
Ezquerro, José A .....	Universidad de La Rioja
Fehrenbach, Jerome .....	Universite Paul Sabatier - Toulouse III (Francia)
Fernandez Cara, Enrique .....	Universidad de Sevilla
Fernández Fernández, Francisco Javier .....	Universidad de Santiago de Compostela
Fernandez Garcia, Jose Ramon .....	Universidade de Santiago de Compostela
Fernández Nieto, Enrique .....	Universidad de Sevilla
Ferragut Canals, Luis .....	Universidad de Salamanca
Ferreira González, Chelo .....	Universidad de Zaragoza
Ferreiro Ferreiro, Ana Maria .....	Universidad de A Coruña
Ferrer Llop, Josep .....	Universitat Politècnica de Catalunya
Fontelos, Marco Antonio .....	CSIC
Fossas Colet, Enric .....	Universidad Politécnica de Cataluña
Franco Coronil, Daniel .....	Universidad de Sevilla
Franco García, José María .....	Universidad de Zaragoza
Franco Pérez, Luis .....	Universidad Autónoma Metropolitana (México)
Freire Macías, Emilio .....	Universidad de Sevilla
Galan-Vioque, Jorge .....	University of Sevilla
Gallardo Molina, José María .....	Universidad de Málaga
Galo Sánchez, José R. ....	Universidad de Córdoba
Gandarias, Maria Luz .....	Universidad de Cádiz
Gander, Martin .....	University of Geneva (Suiza)
Garamendi Bragado, Juan Francisco ..	Universidad Rey Juan Carlos
García Garrido, Víctor José .....	Universidad Complutense de Madrid
García Guirao, Juan Luis .....	Universidad Politécnica de Cartagena
García Medina, Elisabeth .....	Universidad de Sevilla
García Rodríguez, José Antonio .....	Universidad de A Coruña
García Vazquez, Concepcion .....	Universidad de Cádiz
García-Archilla, Bosco .....	Universidad de Sevilla
Garrido Atienza, María José .....	Universidad de Sevilla
Gaspar, Francisco .....	Universidad de Zaragoza
Gayte Delgado, Inmaculada .....	Universidad de Sevilla
Giménez Manglano, Isabel .....	Universidad Politécnica de Valencia
Giné Mesa, Jaume .....	Universitat de Lleida
Godlewski, Edwige .....	Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 (Francia)
Gómez Gandarillas, Delfina .....	Universidad de Cantabria
Gómez Ibáñez, Inmaculada .....	Universidad de Zaragoza
Gómez Mármol, Macarena .....	Universidad de Sevilla
González Burgos, Manuel .....	Universidad de Sevilla
Gonzalez Gutierrez, Leo Miguel .....	Universidad Politécnica de Madrid
Gonzalez Montesinos, Maria Teresa ...	Universidad de Cadiz
González Núñez, Jorge .....	Universidad de Sevilla
González Taboada, María .....	Universidad de la Coruña
González Vidas, José Manuel .....	Universidad de Málaga
Gracia, Juan-Miguel .....	Universidad del País Vasco

Grau Montaña, Maite .....	Universitat de Lleida
Grenier, Emmanuel .....	Ecole Normale Supérieure de Lyon (Francia)
Guillen-Gonzalez, Francisco .....	Universidad de Sevilla
Gutiérrez Santacreu, Juan Vicente ....	Universidad de Sevilla
Hernández Jiménez, M <sup>a</sup> Beatriz .....	Universidad de Huelva
Herranz Cuadrado, M <sup>a</sup> Victoria .....	Universidad Miguel Hernández
Higueras Sanz, Inmaculada .....	Universidad Pública de Navarra
Ibort, Alberto .....	Universidad Carlos III de Madrid
Iglesias Curto, José Ignacio .....	Universidad de Salamanca / University of Würzburg
Jiménez Casas, Ángela .....	Universidad Pontificia Comillas
Jorge Ulecia, Juan Carlos .....	Universidad Pública de Navarra
Kavian, Otared .....	Université de Versailles Saint-Quentin (Francia)
Kloeden, Peter .....	JW Goethe University (Alemania)
Laliena Bielsa, Antonio .....	Escuela Universitaria de La Almunia de D. Godina
Lanchares, Victor .....	Universidad de La Rioja
Langa, José Antonio .....	Universidad de Sevilla
Linero Bas, Antonio .....	Universidad de Murcia
Llibre, Jaume .....	Universidad Autònoma de Barceona
López Fernández, María .....	Universidad Autónoma de Madrid
López García, José L. ....	Universidad Pública de Navarra
Lorca, Sebastián .....	Universidad de Tarapacá (Chile)
Lozada Cruz, Germán .....	UNESP- Universidade Estadual Paulista (Brasil)
Luna Laynez, Manuel .....	Universidad de Sevilla
Luque Jiménez, Alejandro .....	Universidad Politècnica de Catalunya
M-Seara, Tere .....	Universitat Politècnica de Catalunya
Maestre Caballero, Faustino .....	Universidad de Castilla - La Mancha
Malta, Sandra .....	Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC) (Brasil)
Manzano Garcia, Fernando .....	Universidad Politècnica de Cartagena
Marcellán Español, Francisco .....	Universidad Carlos III de Madrid
Marín Beltrán, Mercedes .....	Universidad de Córdoba
Marín-Rubio, Pedro .....	Universidad de Sevilla
Márquez Durán, Antonio Miguel .....	Junta de Andalucía - Universidad de Sevilla
Marquez Gentil, Antonio .....	Universidad de Oviedo
Martín del Rey, Ángel .....	Universidad de Salamanca
Martín Gómez, José D. ....	Universidad de Sevilla
Martínez Aparicio, Pedro Jesús .....	Universidad de Granada
Martínez Fernández, Rebeca .....	Universidade de Santiago de Compostela
Martínez García, Vicente .....	Universitat Jaume I
Martinez Gavara, Anna .....	Universitat de València
Martínez Molada, Eulalia .....	Universidad Politècnica de Valencia
Meddahi Bouras, Salim .....	Universidad de Oviedo
Menéndez Pérez, Cesar Omar .....	Universidad de Oviedo
Milton, Graeme .....	University of Utah (USA)
Molera Molera, Juan Manuel .....	Universidad Carlos III de Madrid
Montijano Torcal, Juan Ignacio .....	Universidad de Zaragoza

Morales Rodrigo, Cristian .....	Warsaw University (Polonia)
Moreno Balcázar, Juan José .....	Universidad de Almería
Moreno Iraberte, María Jesús .....	Universidad de Sevilla
Moreta Santos, M <sup>a</sup> Jesús .....	Universidad Complutense de Madrid
Moro, Julio .....	Universidad Carlos III de Madrid
Muñoz, Víctor .....	Universidad de Valladolid
Muñoz Montalvo, Ana Isabel .....	Universidad Rey Juan Carlos
Muñoz Porras, Jose-Maria .....	Universidad de Salamanca
Muñoz Ruiz, María Luz .....	Universidad de Málaga
Muñoz Sola, Rafael .....	Universidad de Santiago de Compostela
Murat, François .....	Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) (Francia)
Narbona Reina, Gladys .....	Universidad de Sevilla
Navarro Lérida, María Cruz .....	Universidad de Castilla- La Mancha
Ortega Torres, Elva .....	Universidad de Antofagasta (Chile)
Ortegon Gallego, Francisco .....	Universidad de Cadiz
Osses, Axel .....	Universidad de Chile
Padial Molina, Juan Francisco .....	Universidad Politécnica de Madrid
Pagola Martínez, Pedro Jesús .....	Universidad Pública de Navarra
Palacián Subiela, Jesús Francisco .....	Universidad Pública de Navarra
Pantazi, Chara .....	Universidad Politécnica de Cataluña
Pardo, Rosa .....	Universidad Complutense de Madrid
Pardo Milanés, Alberto .....	Universidad de Málaga
Parés Madroñal, Carlos .....	Universidad de Málaga
Parrilla Bernabé, Eduardo .....	Universidad Politécnica de Valencia
Pedregal Tercero, Pablo .....	Universidad de Castilla-La Mancha
Pedroche Sánchez, Francisco .....	Universitat Politècnica de Valencia
Peña Alcaraz, Maite .....	Universidad Pontificia Comillas, ICAI
Pena Brage, Francisco José .....	Univesidade de Santiago de Compostela
Peralta-Salas, Daniel .....	Universidad Carlos III de Madrid
Perea Marco, Mari Carmen .....	Universidad Miguel Hernández
Pérez Caro, Pedro .....	Universidad Autónoma de Madrid
Pérez García, María del Rosario .....	Universidad de Sevilla
Perez Garcia, Victor M. ....	Universidad de Castilla-La Mancha
Pérez Pérez, María Teresa .....	Universidad Carlos III de Madrid
Pérez Sinusía, Ester .....	Universidad Pública de Navarra
Periago Esparza, Francisco .....	Universidad Politécnica de Cartagena
Pinto, Raquel .....	University of Aveiro (Portugal)
Pironneau, Olivier .....	Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 (Francia)
Ponce, Enrique .....	Universidad de Sevilla
Poncela Pardo, José Manuel .....	Universidad Politécnica de Madrid
Portero Egea, Laura .....	Universidad Pública de Navarra
Prieto Ortiz, Juan Luis .....	Universidad Politécnica de Madrid
Prytula, Vladyslav .....	Universidad de Castilla-la Mancha
Puel, Jean-Pierre .....	Universite de Versailles-Saint Quentin (Francia)
Puerta Coll, Xavier .....	Universidad Politecnica de Catalunya
Ramos, Angel Manuel .....	Universidad Complutense de Madrid

Rapún, María Luisa .....	Universidad Politécnica de Madrid
Real Anguas, Jose .....	Universidad de Sevilla
Redondo Neble, Victoria .....	Universidad de Cadiz
Reguera López, Nuria .....	Universidad de Burgos
Riaza, Ricardo .....	Universidad Politécnica de Madrid
Rivero Garvía, Luis Felipe .....	Universidad Complutense de Madrid
Robinson, James .....	Univeristy of Warwick (UK)
Rodrigo Cardiel, Carmen .....	Universidad de Zaragoza
Rodríguez Bellido, María Angeles ....	Universidad de Sevilla
Rodríguez Galvan, Rafael .....	Universidad de Cadiz
Rodríguez Seijo, José Manuel .....	Universidade da Coruña
Rodríguez-Bernal, Anibal .....	Universidad Complutense de Madrid
Rojas Medar, Marko Antonio .....	Universidade Estadual de Campinas (Brasil)
Romero Álvarez, Natalia .....	Universidad de La Rioja
Ros Padilla, Francisco Javier .....	Universidad de Sevilla
Rossi, Julio Daniel .....	Universidad de Buenos Aires (Argentina)
Rubio Crespo, María Jesús .....	Universidad de La Rioja
Rus Mansilla, Francisco .....	Universidad de Málaga
Saavedra Lago, Laura .....	Universidad de Santiago de Compostela
Sánchez Muñoz, Isabel .....	Universidad de Sevilla
Sanguino Botella, Javier .....	Universidad Politécnica de Madrid
Santamaría Martín, Esperanza .....	Universidad Complutense de Madrid
Sayas, Francisco Javier .....	Universidad de Zaragoza
Schiavi, Emanuele .....	Universidad Rey Juan Carlos
Selgas Buznego, Virginia .....	Universidad de La Coruña
Serna, Susana .....	University of California Los Angeles (USA)
Sevilla, Rubén .....	Universitat Politècnica de Catalunya
Simon, Jacques .....	CNRS, Université Blaise Pascal (Francia)
Suárez Fernández, Antonio .....	Universidad de Sevilla
Suárez Grau, Francisco Javier .....	Universidad de Sevilla
Suárez Pérez del Río, Jesús .....	Universidad de Oviedo
Taboada Vázquez, Raquel .....	Universidade da Coruña
Tapiador, Bárbara .....	Universidad Complutense de Madrid
Tello del Castillo, José Ignacio .....	Universidad Politécnica de Madrid
Tello del Castillo, Lourdes .....	Universidad Politécnica de Madrid
Thome, Nestor .....	Universidad Politecnica de Valencia
Torregrosa Sánchez, Juan Ramón .....	Universidad Politécnica de Valencia
Torres Peral, Francisco .....	Universidad de Sevilla
Trillo Moya, Juan Carlos .....	Universidad Politécnica de Cartagena
Trujillo Guillén, Macarena .....	Universidad Politécnica de Valencia
Tucsnaak, Marius .....	Université Henri Poincaré (Francia)
Urbano Salvador, Ana María .....	Universidad Politécnica de Valencia
Uzer, Turgay .....	Georgia Institute of Technology (USA)
Valero, José .....	Universidad Miguel Hernández de Elche
Varona, Juan Luis .....	Universidad de La Rioja
Vázquez Cendón, Carlos .....	Universidade da Coruña



Velasco Angulo, Francisco-Enrique ...	Universidad del País Vasco
Velazquez, Juan .....	Universidad Complutense de Madrid
Vexler, Boris .....	J. Radon Inst. for Comp. and App. Math. (RICAM) (Austria)
Villamizar Roa, Elder Jesús .....	Universidad Industrial de Santander (Colombia)
Yañez Avendaño, Dionisio Félix .....	Universidad de Valencia
Yanguas Sayas, Patricia .....	Universidad Pública de Navarra



## ÍNDICE ALFABÉTICO DE AUTORES



## ÍNDICE ALFABÉTICO

- A**
- Abad Rodríguez, Manuel F. .... 284
- Abderramán Marrero, Jesús C. .... 123
- Acción, Antonio ..... 185
- Albiach, José ..... 227
- Alonso Mallo, Isaías ..... 262
- Alvarez Vázquez, Lino J. .... 247
- Amat Plata, Sergio ..... 167, 211, 286, 288
- Ambrosetti, A. .... 155
- Aranda Ortega, Ernesto ..... 225
- Arandiga, F. .... 212
- Arcoya Álvarez, David ..... 196
- Arjona Almodóvar, Alicia ..... 193
- Arrarás Ventura, Andrés ..... 257, 301
- Arregui, Iñigo ..... 185
- Arrieta, José M. .... 120, 156, 235
- Asensio Madrid, Gabriel ..... 175, 258
- B**
- Bailo Ballarín, Esteban ..... 279
- Balaguer Beser, Angel ..... 299
- Balibrea Gallego, Francisco ..... 163, 165
- Baragaña Gárate, Itziar ..... 220
- Barboteu, Mikael ..... 297
- Barcelo, Gabriel ..... 134
- Barrabés Vera, Esther ..... 127, 238
- Barrio Gil, Roberto ..... 131
- Barrios, Tomás P. .... 213
- Baudouin, Lucie ..... 245
- Bayada, Guy ..... 294
- Beitia, M. Asunción ..... 221
- Bellido Guerrero, José C. .... 144, 146
- Belmonte Beitia, Juan ..... 158
- Benítez García, Marta ..... 264
- Bermejo Bermejo, Rodolfo ..... 266
- Bermúdez de Castro, Alfredo 189, 259, 264,  
267
- Bermúdez Edo, M. Concepción .... 211, 286
- Bernardi, Cristina ..... 142, 215
- Blanc, Xavier ..... 103
- Blasco Lorente, Jordi ..... 172
- Blesa, Fernando ..... 131
- Boal Sánchez, Natalia ..... 246
- Boldrini, José Luiz ..... 161
- Bosi, Roberta ..... 198
- Bouchut, F. .... 292
- Boulakia, Muriel ..... 245
- Braack, Malte ..... 73
- Brenier, Yann ..... 42
- Bresch, Didier ..... 265, 292
- Bru García, Rafael ..... 203, 280
- Bruzón Gallego, M. de los Santos ..... 233
- Buades Capo, Antonio ..... 183
- Bujanda Cirauqui, Blanca ..... 178, 254
- Busquier, Sonia ..... 211, 286
- Bustanza, Rommel ..... 295
- C**
- Cabada, Alberto ..... 125
- Cabello Pardos, Ana B. .... 250
- Cáceres Granados, M. José ..... 198
- Cadarso Suárez, Carmen ..... 79
- Caffisch, Russel E. .... 45
- Calzada Canalejo, Carmen ..... 172, 255
- Calzada Delgado, Juan A. .... 219
- Camacho Vázquez, Gema ..... 255
- Camacho, José C. .... 233
- Cannarsa, Piermarco ..... 43
- Cantó Colomina, Begoña ..... 285
- Cantó Colomina, Rafael ..... 202, 282
- Capdeboscq, Yves ..... 91
- Caraballo Garrido, Tomás ..... 160, 271
- Carmona Centeno, Victoriano . 57, 130, 243
- Carmona, José ..... 196
- Carpio Huertas, Jaime ..... 75
- Carpio, Ana ..... 182
- Carvalho, Alexandre N. .... 235
- Casado Díaz, Juan ..... 148, 231
- Casal Piga, Alfonso C. .... 194
- Casas, Pablo S. .... 186
- Castro Díaz, Manuel J. . . 140, 184, 291–293
- Castro, Carlos ..... 248
- Cea, Luis ..... 97
- Chacón Rebollo, Tomás . 141, 142, 177, 215,  
298
- Chacón Vera, Eliseo ..... 142, 215

Chiavassa, Guillaume . . . . .	256	el-Ghamry, Ramón . . . . .	200
Chierchia, Luigi . . . . .	109	Ezquerro Fernández, José A. . . . .	208
Cid Araujo, Jose A. . . . .	125		
Clavero, Carmelo . . . . .	188	<b>F</b>	
Climent Ezquerro, Blanca . . . . .	289	Fehrenbach, Jérôme . . . . .	92
Clotet Juan, Josep . . . . .	223	Fernández Cara, Enrique . . . . .	151, 255
Codina, Ramón . . . . .	214	Fernández Fernández, Francisco J. . . . .	247
Cohen, A. . . . .	212	Fernández García, Jose R. . . . .	297, 300
Coll Vicens, Bartomeu . . . . .	183	Fernández Méndez, Sonia . . . . .	268
Coll, Carmen . . . . .	285	Fernández Nieto, Enrique D. . . . .	291–293
Colorado Heras, Eduardo . . . . .	155	Fernández Sánchez, Fernando . . . . .	130
Compta, Albert . . . . .	224	Ferragut Canals, Luis . . . . .	174
Coquel, Frédéric . . . . .	216	Ferreira González, Chelo . . . . .	236
Cordero, Alicia. . . . .	206	Ferreira, C. Lucas . . . . .	117
Corral, Cristina . . . . .	203	Ferreiro Ferreiro, Ana M. . . . .	291, 293
Cors, Josep M. . . . .	238	Ferrer Llop, Josep . . . . .	224
Cortés Utrillas, Vanesa. . . . .	204	Ferrín, José L. . . . .	189
Couce Calvo, Julio . . . . .	148	Fontelos, Marco A. . . . .	122, 199
Cuesta Montero, Eduardo . . . . .	217	Fossas Colet, Enric . . . . .	56
Cvetkovic, Ljiljana . . . . .	280	Fowler, A.C. . . . .	272
<b>D</b>		Franco Coronil, Daniel . . . . .	215
Dal Maso, Gianni . . . . .	50	Franco García, José M. . . . .	242
de Aguiar, Rogerio . . . . .	149	Franco Pérez, Luis . . . . .	244
de Almeida, Regina C.C. . . . .	290	Freire Macías, Emilio. . . . .	44
de Hoyos Izquierdo, Inmaculada. . . . .	221	<b>G</b>	
de la Hoz Méndez, Francisco . . . . .	218	Gallardo Molina, José M. . . . .	184
de Prada Pérez, Paz . . . . .	129	Galo Sánchez, José R. . . . .	171
de Terán Vergara, Fernando. . . . .	201	Gandarias, Maria Luz . . . . .	277
de Teresa, Luz . . . . .	150	Gander, Martin . . . . .	51
Deco, Gustavo . . . . .	48	Garamendi Bragado, Juan F. . . . .	138
Delgado Delgado, Manuel . . . . .	274	García Chan, Nestor . . . . .	147
Díaz Moreno, José M. . . . .	176, 197	García Garrido, Víctor J. . . . .	159
Díaz, J. Ildefonso . . . . .	119, 134, 159, 193–195, 272	García Guirao, Juan L. . . . .	166
Domínguez Delgado, Antonio . . . . .	141	García Medina, Elisabeth . . . . .	130
Domínguez, Víctor . . . . .	180	García Rodríguez, José A. . . . .	291
Donat, Rosa . . . . .	256, 288	García Vázquez, Concepción . . . . .	197
Donoso, Alberto . . . . .	146	García, Belén . . . . .	164
Dopico, Froilán M. . . . .	201	García, Isaac A. . . . .	128
Doubova Krasotchenko, Anna . . . . .	151, 245	Garrido Atienza, M. José . . . . .	271
Dumas, H. Scott . . . . .	240	Gaspar, Francisco . . . . .	135, 260
Durán, Mario . . . . .	161	Gatica, Gabriel N. . . . .	190, 213, 261
Durany Castrillo, José . . . . .	181	Gatica, Luis F. . . . .	213
<b>E</b>		Gayte Delgado, Inmaculada . . . . .	151
Echevarría Líbano, Rosa . . . . .	151	Gelonch, José . . . . .	279
		Giacomini, Héctor . . . . .	128

Giménez Manglano, Isabel . . . . .	203	Kostic, Vladimir . . . . .	280
Giné Mesa, Jaume . . . . .	129, 237	Kressner, Daniel . . . . .	278
Ginestar, Damián . . . . .	296		
Godlewski, Edwige . . . . .	216	<b>L</b>	
Gómez Gandarillas, Delfina . . . . .	234	Laliena Bielsa, Antonio . . . . .	179, 253
Gómez Ibáñez, Inmaculada . . . . .	242	Lanchares, Victor . . . . .	110
Gómez Mármol, Macarena . . . . .	98, 177, 298	Langa, José Antonio . . . . .	68
González Burgos, Manuel . . . . .	150	Laso Carbajo, Manuel . . . . .	266
González Gutiérrez, Leo M. . . . .	133	Linero Bas, Antonio . . . . .	163, 165
González Montesinos, M. Teresa . . . . .	176, 197	Liñán, Amable . . . . .	189
González Taboada, María . . . . .	213	Lisbona, Francisco . . . . .	135, 188, 260
González Vida, José M. . . . .	99	Llibre, Jaume . . . . .	49, 164, 241
González, Ana B. . . . .	219	Lobo, Miguel . . . . .	234
González, Pedro M. . . . .	175, 258	López Fernández, María . . . . .	207
Gracia, José L. . . . .	188, 260	López García, José L. . . . .	61, 115, 124, 236
Gracia, Juan M. . . . .	283	López Guerrero, Miguel A. . . . .	166
Grau Montaña, Maite . . . . .	128, 237	López Velázquez, Juan J. . . . .	105
Grenier, Emmanuelle . . . . .	80	Lorca, Sebastián . . . . .	275
Guillamon, Antoni . . . . .	239	Lozada Cruz, Germán . . . . .	235
Guillén González, Francisco . . . . .	116, 139, 265, 289	Lubich, C. . . . .	207
Gutiérrez Santacreu, Juan V. . . . .	116	Luna Laynez, Manuel . . . . .	231
		Luque Jiménez, Alejandro . . . . .	209
<b>H</b>			
Helmke, Uwe . . . . .	251	<b>M</b>	
Hernández Encinas, Ascensión . . . . .	250	Maestre Caballero, Faustino . . . . .	249
Hernández Jiménez, Beatriz . . . . .	143	Magret, M. Dolors . . . . .	223
Hernández, Miguel A. . . . .	208, 210	Makridakis, Charalambos . . . . .	217
Herranz Cuadrado, M. Victoria . . . . .	252	Malpica, N. . . . .	138
Herrero, Alicia . . . . .	205	Malta, Sandra M.C. . . . .	290
Herrero, Henar . . . . .	226	Mangeney, A. . . . .	292
Heuer, Norbert . . . . .	180	Manzano García, Fernando . . . . .	167, 211
Higueras Sanz, Inmaculada . . . . .	169	Marcellán Español, Francisco . . . . .	62
Hoya White, Sara . . . . .	250	Marín Beltrán, Mercedes . . . . .	81, 172, 255
Huerta, Antonio . . . . .	268	Marín Rubio, Pedro . . . . .	168
Hueso, José L. . . . .	296	Márquez Durán, Antonio M. . . . .	160
		Márquez Gentil, Antonio . . . . .	190
<b>I</b>		Martín del Rey, Ángel . . . . .	250
Iglesias Curto, José Ignacio . . . . .	251	Martín Gómez, José D. . . . .	148
		Martin, Sébastien . . . . .	294
<b>J</b>		Martínez Aparicio, Pedro J. . . . .	196
Jiménez Casas, Ángela . . . . .	232	Martínez Dopico, Froilán . . . . .	281
Jordán, Cristina . . . . .	200	Martínez Fernández, Rebeca . . . . .	300
Jorge Ulecia, Juan C. . . . .	178, 254, 257, 301	Martínez Gavara, Anna . . . . .	256
		Martínez Molada, Eulalia . . . . .	227
<b>K</b>		Martínez Seara, Tere . . . . .	55
Kloeden, Peter E. . . . .	67, 168	Mas, José . . . . .	203

Meddahi Bouras, Salim.....	190, 261	Parés Madroñal, Carlos ..	41, 137, 140, 184, 291
Mercado, Alberto.....	245	Parrilla Bernabé, Eduardo .....	296
Meyer, Kenneth.....	240	Pedregal Tercero, Pablo .....	145, 249
Meziat, René .....	225	Pedroche Sánchez, Francisco .....	280
Milton, Graeme .....	93	Peláez, M. José .....	278
Molera Molera, Juan M. ....	281	Pena Brage, Francisco J.....	259
Mondelo, Josep M.....	127	Peña Alcaraz, Maite .....	133
Mora Corral, C.....	144	Peña Carrera, Marta.....	223, 224
Morales Rodrigo, Cristian .....	273	Peña, Juan M.....	204
Morel, Jean M. ....	183	Peralta Salas, Daniel.....	132
Moreno Balcázar, Juan J.....	162	Perea Marco, M. Carmen.....	87, 252
Moreta Santos, M. Jesús .....	178	Pereira Pérez, José.....	181
Moro, Julio .....	201, 278	Pérez Chavela, Ernesto.....	244
Münch, Arnaud .....	145, 249	Pérez García, Victor M.....	104, 158
Muñoz Montalvo, Ana I. ....	122, 199, 272	Pérez Llanos, Mayte .....	121
Muñoz Porrás, José M.....	85	Pérez Sinusía, Ester .....	115, 124
Muñoz Ruiz, María Luz.....	137	Pérez, M. Eugenia .....	234
Muñoz Sola, Rafael.....	147, 247, 259	Periago Esparza, Francisco.....	145
Muñoz, Víctor .....	170	Pinto, Raquel .....	86
Murat, François .....	231	Pinyol, C.....	238
<b>N</b>		Platero, Carlos.....	175, 258
Narbona Reina, Gladys .....	177	Plaza, Sergio.....	211, 286
Navarro Lérida, M. Cruz .....	226	Ponce, Enrique.....	241, 243
Novo, Silvia.....	170	Poncela Pardo, José M.....	175, 258
<b>O</b>		Portero Egea, Laura.....	257, 301
Obaya, Rafael.....	170	Prieto Ortíz, Juan L.....	266
Ollé, Mercè .....	127	Puel, Jean P. ....	245
Oosterlee, C.W.....	260	Puerta Coll, Xavier .....	222
Ortega Torres, Elva, E. ....	173	Puerta, F. ....	220
Ortega, Jaime.....	149	<b>R</b>	
Ortegón Gallego, Francisco.....	176, 197	Ramos, Ángel M. ....	134
Osses, Axel .....	245	Rapún, María Luisa.....	179
Osuna Gómez, Rafaela.....	143	Real Anguas, José .....	160
Otero Piñeiro, M. Victoria .....	263	Redondo Neble, Victoria.....	139
Ouafik, Youssef .....	297	Reguera López, Nuria .....	262
Oyarzúa, Ricardo .....	261	Riaza, Ricardo .....	126
<b>P</b>		Ricarte, Beatriz.....	202, 282
Padial Molina, Juan F.....	195	Riera, Jaime .....	296
Pagola Martínez, Pedro J.....	124	Robinson, James C.....	69
Palacián Subiela, Jesús F.....	240	Rodrigo Cardiel, Carmen.....	135, 188
Pantazi, Chara.....	239	Rodríguez Bellido, M. Angeles .....	265
Pardo Milanés, Alberto .....	140	Rodríguez Bernal, Anibal.....	120, 156, 157
Pardo, Rosa .....	156	Rodríguez Sánchez, Gerardo .....	250
		Rodríguez Seijo, José M.....	187, 263



Rodríguez, Rodolfo . . . . .	267	Torres Peral, Francisco . . . . .	241
Rodríguez Galván, J. Rafael . . . . .	287	Torres, Pedro J. . . . .	158
Rojas Medar, María Drina . . . . .	149	Trillo Moya, Juan Carlos . . . . .	288
Rojas Medar, Marko A. . 143, 149, 161, 173, 289		Tucsnak, Marius . . . . .	46
Roldan Marrodan, Teo . . . . .	169	<b>U</b>	
Romero Álvarez, Natalia . . . . .	208	Urbano Salvador, Ana M. . . . .	202, 282
Romero, Sergio . . . . .	279	Uzer, Turgay . . . . .	111
Ros Padilla, Francisco J. . . . .	243	<b>V</b>	
Rossi, Julio D. . . . .	47, 121	Valero, José . . . . .	120, 271
Rubio Crespo, M. Jesús . . . . .	210	Varas, Fernando . . . . .	181
Rus Mansilla, Francisco . . . . .	136	Varona, Juan Luis . . . . .	63
<b>S</b>		Vázquez Cendón, Carlos . . . . .	185, 294
Saavedra Lago, Laura . . . . .	189	Vázquez, Miguel E. . . . .	147
Salgado, Pilar . . . . .	267	Vegas, José M. . . . .	194
Sánchez Muñoz, Isabel . . . . .	298	Vekslerchik, Vadym . . . . .	158
Sánchez, Elena . . . . .	285	Velasco Angulo, Francisco E. . . . .	283
Sanguino Botella, Javier . . . . .	175, 258	Vexler, Boris . . . . .	74
Sastre, M.A. . . . .	123	Viaño, Juan M. . . . .	300
Sayas, Francisco J. . . 179, 180, 246, 253, 295		Villamizar Roa, Elder J. . . . .	117
Schädle, A. . . . .	207	Villanueva, Jordi . . . . .	209
Schiavi, Emanuele . . . . .	138, 199, 272	Villatoro, Francisco R. . . . .	136
Schmalfuss, Björn . . . . .	271	<b>Y</b>	
Seguin, Nicolas . . . . .	216	Yanguas Sayas, Patricia . . . . .	240
Selgas Buznego, Virginia . . . . .	267	Yañez Avendaño, Dionisio F. . . . .	212
Serna, Susana . . . . .	302	<b>Z</b>	
Serrano, Sergio . . . . .	131	Zaballa, I. . . . .	220
Sevilla, Rubén . . . . .	268		
Simões, M. Manuela . . . . .	174		
Soler, David . . . . .	227		
Soler, J. . . . .	238		
Suárez Fernández, Antonio . . . . .	274		
Suárez Pérez del Río, Jesús . . . . .	164		
<b>T</b>			
Taboada Vázquez, Raquel . . . . .	187		
Tapiador, Bárbara . . . . .	182		
Tello del Castillo, José Ignacio . . . . .	118		
Tello del Castillo, Lourdes . . . . .	119		
Teruel Aguilar, Antonio E. . . . .	130		
Theofilis, Vassilis . . . . .	133		
Thome, Nestor . . . . .	205		
Tobar, M. Carmen . . . . .	175, 258		
Torrano, E. . . . .	123		
Torregrosa Sánchez, Juan R. . 200, 206, 284, 296			