Grafos prohibidos y lógica cuántica

José Ra. Portillo

Universidad de Sevilla, España

Se definen los siguientes tipos de conjuntos de proposiciones lógicas (representadas en teoría cuántica por operadores de proyección de rango 1 o por vectores de $\mathcal{C}^n$): (i) *conjunto verdad-implica-falso (true-implies-false set)* (TIFS), (ii) *conjunto verdad-implica-verdad (true-implies-true set)* (TITS) y (iii) *conjunto no separable (nonseparating set)* (NSS) como los conjuntos en lo que cuando se asume no contextualidad en el resultado (i) si la proposición $A \in S$ es verdad, entonces una proposición no exclusiva $B \in S$ debe ser falsa, (ii) si la proposición $A \in S$ es verdad, entonces una proposición $C \in S$ debe ser verdad y (iii) si la proposición $A \in S$ es verdad, entonces una proposición $C \in S$ debe ser verdad y *viceversa*. Es decir, A y C no pueden ser separadas por lógicas clásicas. Estos conjuntos TIFS, TITS y NSS se denominan *críticos* si ningún subconjunto suyo es un TIFS, TITS o NSS, respectivamente. Un TIFS/TITS/NSS puede ser representado mediante un grafo en el cual d-cliques representan contextos completos, los vértices representan vectores de $\mathcal{C}^n$ y dos vértices serán adyacentes si y sólo si los vectores son perpendiculares.

En este trabajo utilizamos la teoría de grafos para encontrar TIFS, TITS y NSS críticos en dimensión 3. Para ello estudiamos los grafos realizables, (i.e.,correspondientes a un conjunto de vectores de $\mathcal{S}^2$ que sea representación ortonormal fiel del grafo) mostrando nuevos ejemplos de grafos prohibidos.

El proceso para encontrar estos conjuntos críticos es el siguiente: en primer lugar, generamos todos los grafos no isomorfos de n vértice biconexos, libres de C_4 y que contengan al menos dos C_3 con $n = 8, \ldots, 17$. Para cada grafo obtenido en el paso anterior, consideramos todos los pares de vértices no adyacentes y buscamos las posibles asignaciones de verdad correspondientes. Finalmente, comprobamos si los grafos obtenidos son realizables.

Se han encontrado nuevos conjuntos TIFS y TITS, así como un método constructivo de grafos críticos TIFS a partir de grafos críticos conocidos. Se deduce que existen grafos críticos TIFS y TITS para cualquier número de vértices suficientemente alto. También se proponen nuevos candidatos a conjunto NSS mínimo.