Sobre el problema del 3-coloreado de un grafo utilizando sistemas de ecuaciones polinomiales

María Isabel Hartillo Hermoso
José Manuel Jiménez Cobano
José María Ucha Enríquez

Dpto. Matemática Aplicada I
Instituto Matemáticas Antonio de Castro Brzezicki
Universidad de Sevilla

Resumen

La propiedad de ser 3-coloreable de un grafo G es equivalente a que el sistema

$$x_i^3 - 1 = 0 \ \forall i \in V(G),\ x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 = 0 \ \forall (i,j) \in E(G) \quad (\star)$$

tenga alguna solución[1] (compleja, aunque también puede estudiarse en $\overline{\mathbf{F}}_2$). Este camino para buscar posibles 3-coloreados no es manejable para grafos de gran tamaño usando bases de Gröbner.

Sin embargo, para certificar que un cierto grafo no es 3-coloreable puede tomarse un atajo: basta con demostrar que 1 está en el ideal de los polinomios que definen el sistema $(\star)$ y para eso se puede usar Álgebra Lineal (existe incluso un software especializado en esta tarea, `NulLA`).

Problema: ¿Sería posible demostrar el carácter NP-completo del problema del 3-coloreado de grafos mostrando una familia que necesitara para obtener los certificados de no 3-coloreabilidad polinomios de grado adecuado?

Palabras clave— 3-coloreado, bases de Gröbner, Nullstellenstaz

1. J.A. De Loera, J. Lee, P.N. Malkin, and S. Margulies. *Hilbert's Nullstellensatz and an algorithm for proving combinatorial infeasibility.* Proceedings of the Twenty-first International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 2008).